Satz: Sei $X : I \times U \to E$ ein stetiges und im Raum uniform L-Lipschitzstetiges VF. Es seien $\gamma, \eta : J \to U$ jeweils **approximative Int.kurven**, d.h.:

$$|\gamma'(t) - X_t(\gamma(t))| < \rho \qquad \forall t \in J$$

$$|\eta'(t) - X_t(\eta(t))| < \sigma$$

Dann gilt

$$|\gamma(t) - \eta(t)| \leq |\gamma(t_0) - \eta(t_0)| e^{L|t-t_0|} + \frac{\rho+\sigma}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)$$

Bew: **Setze**

$$\Delta(t) := \gamma(t) - \eta(t)$$

$$f(t) := |\Delta(t)| + \frac{\rho+\sigma}{L}$$

Beh: $f(t) \leq f(t_0) + L \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$

$\ulcorner$

Wir integrieren $|\gamma'(t) - X_t(\gamma(t))| < \rho$ und erhalten

$$\left| \gamma(t) - \gamma(t_0) - \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s))\,ds \right| < |t-t_0|\rho$$

D.h.: $\gamma(t)-\gamma(t_0)$ liegt in der $|t-t_0|\varepsilon$-Umg.

von $$\int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s))\,ds$$

Analog:

$\eta(t)-\eta(t_0)$ liegt in der $|t-t_0|\sigma$-Umg.

von $$\int_{t_0}^{t} X_s(\eta(s))\,ds$$

Durch Subtraktion von Näherungen erhalten wir

$$\Delta(t)-\Delta(t_0) = \gamma(t)-\gamma(t)-(\eta(t)-\eta(t_0))$$

liegt in der $|t-t_0|(\varepsilon+\sigma)$ - Umg.

von $$\int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s)) - X_s(\eta(s))\,ds$$

Also liegt $\Delta(t)$ in der $|t-t_0|(\varepsilon+\sigma)$-Umg

von $$\Delta(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s))-X_s(\eta(s))\,ds.$$

Insbesondere gilt $(t_0 \le t)$

$$|\Delta(t)| \le \left|\Delta(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_s(\gamma(s)) - X_s(\eta(s))\,ds\right| + |t-t_0|(\varepsilon+\sigma)$$

$$\le |\Delta(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |X_s(\gamma(s))-X_s(\eta(s))|\,ds + \int_{t_0}^{t} \varepsilon+\sigma\,ds$$

$$\leq |\Delta(t_0)| + \int_{t_0}^{t} L|\gamma(s)-\eta(s)| + \varrho+\sigma \, ds$$

$$\leq |\Delta(t_0)| + L\int_{t_0}^{t} |\Delta(s)| + \frac{\varrho+\sigma}{L} \, ds$$

$$\leq |\Delta(t_0)| + L\int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

Addition von $\frac{\varrho+\sigma}{L}$ auf beiden Seiten ergibt

$$f(t) \leq f(t_0) + L\int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

$\lrcorner$

Gronwald $\Rightarrow$ $\quad f(t) \leq f(t_0)\, e^{L|t-t_0|}$

D.h.: $\quad |\Delta(t)| + \frac{\varrho+\sigma}{L} \leq |\Delta(t_0)|\, e^{L|t-t_0|} + \frac{\varrho+\sigma}{L} e^{L|t-t_0|}$

$$|\Delta(t)| \leq |\Delta(t_0)| e^{L|t-t_0|} + \frac{\varrho+\sigma}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)$$

$\boxtimes$

<u>Kor:</u> Seien $A, B : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $a, b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Es gelte $\|A(t)\| \leq L$ und $\|B(t)\| \leq L$ sowie $\|a(t)\| \leq K$ und $\|b(t)\| \leq K$ für alle $t \in I$.

Zu jedem kompakten Teilintervall $t_0 \in J \subseteq I$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\beta > 0$, so daß gilt:

Ist
$$\left.\begin{array}{l}\|A(t) - B(t)\| \leq \beta \\ \|a(t) - b(t)\| \leq \beta\end{array}\right\} \text{ für alle } t \in I$$
$$\|u_0 - v_0\| \leq \beta \qquad u_0, v_0 \in \mathbb{R}^n$$

und ist γ die Lösung des AWP
$$\left\| \begin{array}{l} \gamma'(t) = A(t)\gamma(t) + a(t) \\ u_0 = \gamma(t_0) \end{array} \right\|$$

sowie η die Lösung des AWP
$$\left\| \begin{array}{l} \eta'(t) = B(t)\eta(t) + b(t) \\ v_0 = \eta(t_0) \end{array} \right\|$$

<u>dann</u> ist $\|\gamma(t) - \eta(t)\| < \varepsilon$

für alle $t \in J$.

<u>Bew:</u> Die Idee ist η als approximative Int. kurve zu $X_t(u) = A(t)u + a(t)$ auf zu fassen:

$$\eta'(t) = B(t)\eta(t) + b(t)$$

$$\eta'(t) - X_t(\eta(t)) = \big(B(t) - A(t)\big)\eta(t) + b(t) - a(t)$$

<u>Beob:</u> $\left|\big(B(t) - A(t)\big)\eta(t) + \big(b(t) - a(t)\big)\right|$

$$\leq |B(t) - A(t)|\,|\eta(t)| + |b(t) - a(t)|$$

$$\leq \beta\,|\eta(t)| + \beta$$

<u>Erinnerung</u> $|\eta(t)| \leq |\eta(t_0)|\,e^{L|t-t_0|} + \frac{L}{k}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)$

Und hier ist der Grund, warum wir das wissen wollten!

$\leq$ konst C_J auf J

<u>Also:</u> $\left|\eta'(t) - X_t(\eta(t))\right| \leq \beta\,(C_J + 1)$

<u>Damit:</u> $|\gamma(t) - \eta(t)| \leq |\gamma(t_0) - \eta(t_0)|\,e^{L|t-t_0|}$

$$+ \frac{\beta(C_J + 1)}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)$$

$$\leq \beta \underbrace{\left[e^{L|t-t_0|} + \frac{c_J+1}{L}\left(e^{L|t-t_0|}-1\right) \right]}_{\text{beschr. auf } J.}$$

$$< \varepsilon \text{ für } \beta \text{ klein genug} \quad \blacksquare$$

Kor Sei $X: I \times U \to E$ stetig und unif. L-Lipschitzstetig im Raum. $K > 0$ erfülle

$$\| X_t(v_0) \| \leq K \qquad \forall\ t \in I$$

Dann gilt für jede Int. kurve $\gamma: I \to U$

$$\| \gamma(t) - v_0 \| \leq \| \gamma(t_0) - v_0 \| \, e^{L|t-t_0|} + \frac{K}{L} \left(e^{L|t-t_0|} - 1 \right)$$

Bew: Die Kurve $\eta(t) := v_0$ erfüllt die Bedingung

$$\| \eta'(t) - X_t(\eta(t)) \| = \| 0 - X_t(v_0) \| \leq K$$

für alle t. Sie ist also eine appr. Int. kurve mit Fehler $\leq K$.

Daher ist

$$\begin{aligned} \| \gamma(t) - v_0 \| &= \| \gamma(t) - \eta(t) \| \\ &\leq \| \gamma(t_0) - \eta(t_0) \| \, e^{L|t-t_0|} \\ &\quad + \frac{K+0}{L} \left(e^{L|t-t_0|} - 1 \right) \end{aligned}$$

$\boxtimes$

<u>Überlegung</u>: $X : I \times P \times U \to \mathbb{R}^n$ $\quad I \subseteq \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^m$

stetig, unif. L-Lip. im Raum

$t_0 \in J \subseteq I$ $\quad J$: kompakt

$p_0 \in P$, $u_0 \in U$, $\quad \delta > 0 : \overline{\mathbb{B}_\delta}(p_0) \times \overline{\mathbb{B}_\delta}(u_0) \subseteq P \times U$

γ_0: Int. kurve zu X^{p_0} mit $\gamma(t_0) = u_0$

Anwendung des Satzes:

Sei $K > 0$ eine obere Schranke für $\| X_t^{p_0}(u) \|$ auf $J \times \overline{\mathbb{B}}_\delta(u_0)$. Dann gilt

$$\| \gamma(t) - \underset{u_0}{\overset{\delta}{\text{||}} u} \| \leq \underbrace{\| u_0 - u \|}_{\leq \delta} e^{L|t-t_0|} + \frac{K}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)$$

für alle $t \in J$ und alle $u \in \overline{\mathbb{B}}_\delta(u_0)$.

<u>Folge</u>: $\| \gamma(t) \| \leq \underbrace{\| u_0 \| + \delta + \delta e^{L|t-t_0|} + \frac{K}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)}_{\overset{\wedge}{\leq}\ C(J, K, L, u_0) =: r}$

<u>Bem</u>: Da $J \times \overline{\mathbb{B}_r}(0)$ ist kompakt. Die Funktion

$$q \mapsto \min_{(t,u) \in J \times \overline{\mathbb{B}_r}(0)} \| X_t^{p_0}(u) - X_t^q(u) \|$$

ist stetig.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle zunächst $\delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$\frac{\delta(\varepsilon)}{L}\left(e^{L|t-t_0|}-1\right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } t \in J$$

Nun wähle $\beta > 0$ mit

1) $\| X_t^{p_0}(u) - X_t^{q}(u) \| < \delta(\varepsilon)$

für alle $(t, q, u) \in J \times \overline{\mathbb{B}}_\beta(p_0) \times \overline{\mathbb{B}}_r(u)$

2) $\beta e^{L|t-t_0|} < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $t \in J$

Sei nun $v_0 \in \mathbb{B}_\beta(u_0)$ und $q_0 \in \mathbb{B}_\beta(p_0)$.

Sei η die Int.kurve zu X^{q_0} mit $\eta(t_0) = v_0$.

<u>Beh</u>: γ ist appr. Int.kurve zu X^{q_0} mit Fehler $\leq \delta(\varepsilon)$.

$\ulcorner$

$$\| \gamma'(t) - X_t^{q_0}(\gamma(t)) \| = \| X_t^{p_0}(\gamma(t)) - X_t^{q_0}(\gamma(t)) \|$$

$$\leq \delta(\varepsilon) \quad \text{weil } \|\gamma(t)\| \leq r$$

$\lrcorner$

Dann folgt:

$$\|\gamma(t)-\eta(t)\| \leq \overbrace{\underbrace{\|\gamma(t_0)-\eta(t_0)\|}_{<\beta} e^{L|t-t_0|}}^{<\varepsilon/2}$$

$$+ \underbrace{\frac{\varrho(\varepsilon)}{L}\left(e^{L|t-t_0|}-1\right)}_{<\varepsilon/2}$$

<u>Also</u>: $\|\gamma(t)-\eta(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \in \mathcal{I}$.

<u>Also</u>: Die Lösung $\gamma(t)$ des AWP $\gamma(t_0)=u_0$ zum VF X^{p_0} hängt stetig von u_0 und p_0 ab.