Def: Ein lineares Vektorfeld

$$X : I \times E \to E$$
$$(t, u) \mapsto A(t)u + b(t)$$

heißt <u>homogen</u>, wenn $b(t) \equiv 0$ ist; sonst heißt X <u>inhomogen</u>; und $b : I \to E$ heißt die <u>Inhomogenität</u> von X.

Satz: Ist $A : I \to M_{n\times n}$ stetig und reellwertig (komplexwertig), so bilden die Integralkurven

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n \qquad (\gamma : I \to \mathbb{C}^n)$$

$$\dot\gamma(t) = A(t)\,\gamma(t) \qquad (*)$$

einen n-dim. $\mathbb{R}$-VR ($\mathbb{C}$-VR).

Für festes $\tau \in I$ wird durch

$$ev_\tau : \gamma \longmapsto \gamma(\tau)$$

ein Isomorphismus erklärt.

Bew: Sind γ und η Lösungen von $(*)$, so folgt

$$\frac{d}{dt}(a\gamma + b\eta)(t) = a\frac{d\gamma}{dt}(t) + b\frac{d\eta}{dt}(t)$$
$$= a\,A(t)\gamma(t) + b\,A(t)\eta(t)$$
$$= A(t)\big(a\gamma(t) + b\eta(t)\big)$$

Ferner ist $\gamma \equiv 0$ eine Lösung von (*).
Also formen die Lösungen einen VR.
Auswertung bei τ

$$ev_\tau : \gamma \mapsto \gamma(\tau)$$

ist augenscheinlich linear.

Existenz und Eindeutigkeit von Int.kurven implizieren, daß ev_τ bijektiv ist. ☒

Kor: a) Für eine Lösung γ von (*) gilt

$$\gamma \equiv 0 \iff \gamma(\tau) = 0$$

b) Lösungen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ von (*) sind lin. unabh g.d.,w. die Vektoren $\gamma_1(\tau), \dots, \gamma_k(\tau) \in E$ lin. unabh. sind.

c) Die Lösungen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ spannen den VR aller Lösungen auf g.d.,w. die Vektoren $\gamma_1(\tau), \dots, \gamma_k(\tau)$ den Raum E aufspannen.

Def: Die Lösungen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ bilden ein <u>Fundamentalsystem</u>, wenn $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ eine Basis des Lösungsraumes ist.

Bem $\Leftrightarrow$ $\{\gamma_1(\tau), \dots, \gamma_n(\tau)\}$ ist Basis von E.

Beob: Sei $\gamma_1, \dots, \gamma_n : I \to \mathbb{M}_{n\times n}$ ein Fundamentalsystem. Setze

$$\Gamma(t) := \left(\gamma_1(t) \cdots \gamma_n(t)\right) \in \mathbb{M}_{n\times n}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\Gamma'(t) &= \left(\gamma_1'(t) \cdots \gamma_n'(t)\right) \\ &= \left(A(t)\gamma_1(t) \cdots A(t)\gamma_n(t)\right) \\ &= A(t)\Gamma(t)\end{aligned}$$

D.h. Γ ist Int.kurve des lin. VF

$$Y : I \times \mathbb{M}_{n\times n} \to \mathbb{M}_{n\times n}$$
$$(t, U) \mapsto A(t)U$$

D.h.: Eine spezielle Lösung Γ der DGL

$$\frac{d}{dt}\Gamma = A(t)\Gamma$$

beschreibt alle Lösungen von

$$\frac{d}{dt}\gamma = A(t)\gamma$$

Das läßt sich noch etwas weitertreiben:

Sei $M : I \to \mathbb{M}_{n\times n}$ die Lösung des AWP

$$\left\| \begin{array}{l} M'(t) = A(t)\, M(t) \\ M(\tau) = \mathbb{I}_n \end{array} \right\|$$

Dann ist $t \mapsto M(t)u_0$ für $u_0 \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des AWP

$$\left\| \begin{array}{l} \gamma'(t) = A(t)\,\gamma(t) \\ \gamma(\tau) = u_0 \end{array} \right\|$$

$\ulcorner$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{M(t)u_0}_{\gamma(t)} = M'(t)\,u_0 = A(t)\underbrace{M(t)\,u_0}_{\gamma(t)}$$

$\lrcorner$

<u>Bem</u>: Sei E ein Banachraum. Dann ist

$$\mathcal{L}(E;E) = \{\varphi : E \to E \mid \varphi : \text{beschr.}\}$$

ein Banachraum bez. $\|\cdot\|_{op}$.

Sei $X: I \times E \to E$
$$(t, u) \mapsto A(t)u$$

das lin. VF definiert durch die stetige Abb $A: I \to \mathcal{L}(E; E)$.

Dann ist $Y: I \times \mathcal{L}(E;E) \to \mathcal{L}(E;E)$
$$(t, \varphi) \mapsto A(t) \circ \varphi$$

ein stetiges lin. VF.

Sei $\Psi: I \to \mathcal{L}(E;E)$ die Lösung
$$t \mapsto \Psi_t$$

des AWP $\left\| \begin{array}{l} \Psi' = A(t)\Psi \\ \Psi_\tau = id_E \end{array} \right\|$

dann ist für jedes $u_0 \in E$ die Kurve $\gamma(t) := \Psi_t(u_0)$ die Lösung des AWP

$$\left\| \begin{array}{l} \gamma' = A(t)\gamma \\ \gamma(\tau) = u_0 \end{array} \right\|$$

Die Wronski-Determinante

Sei $\Gamma : I \to \mathbb{M}_{n\times n}$ eine Lösung von

$$\Gamma' = A(t)\,\Gamma(t) \qquad A : I \to \mathbb{M}_{n\times n}$$

Def: $\varphi(t) := \det \Gamma(t)$ heißt Wronski-Det. des Fundamentalsystem $\Gamma = (\gamma_1 \cdots \gamma_n)$.

Satz: Ist $A : I \to \mathbb{M}_{n\times n}$ stetig, so genügt die Wronski-Det $\varphi(t) = \det \Gamma(t)$ eines Fundamentalsystem der DGL

$$\varphi'(t) = \big(\operatorname{tr} A(t)\big) \cdot \varphi(t) \qquad (\circ)$$

$\operatorname{tr} A(t)$: Spur der Matrix $A(t)$

Die DGL $(\circ)$ läßt sich durch Trennen der Veränderlichen lösen, und es ergibt sich:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds$$

Ist $\Gamma(t_0) = \mathbb{I}_n$ so folgt insbesondere

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds$$

__Bew:__ Sei $H_\tau : I \to \mathbb{M}_{n\times n}$ die Lösung des AWP

$$\left\| \begin{array}{l} H_\tau'(t) = A(t)\, H_\tau(t) \\ H_\tau(\tau) = \mathbb{I}_n \end{array} \right\|$$

Dann ist mit $H_\tau = (\eta_1 \cdots \eta_n)$

$$\frac{d}{dt} \det H_\tau(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(\eta_1(t) \cdots \eta_i'(t) \cdots \eta_n(t))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det(\eta_1(t) \cdots A(t)\eta_i(t) \cdots \eta_n(t))$$

An der Stelle τ gilt also

$$\frac{d}{dt} \det H_\tau \Big|_\tau = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\det(\underline{e}_1 \cdots A(\tau)\underline{e}_i \cdots \underline{e}_n)}_{= a_{ii}(\tau)}$$

$$= \operatorname{tr} A(\tau)$$

Für Γ gilt dann $\Gamma(t) = H_\tau(t)\,\Gamma(\tau)$.

Also $\varphi(t) = \det H_\tau(t) \det \Gamma(\tau)$

__D.h.:__ $\varphi(t) = \det H_\tau(t)\, \varphi(\tau)$

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} H_\tau(t)\, \varphi(\tau)$$

$$\varphi'(\tau) = \operatorname{tr} A(\tau)\, \varphi(\tau)$$

Aber τ war beliebig. $\boxtimes$

Kor: $\varphi \equiv 0$ auf ganz I oder $\varphi \neq 0$ auf ganz I.

$\Gamma = (\gamma_1 \cdots \gamma_n)$ ist ein Fundamentalsystem g.d.w. $\varphi \neq 0$ ist.

Satz: Sei $X: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$(t, u) \mapsto A(t)u + b(t)$

ein stetiges lin. VF, und

$Y: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$(t, u) \mapsto A(t)u$

sei das induzierte homogene VF.

Sind $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ eine X-Int.kurve.
Für eine Kurve $\eta: I \to \mathbb{R}^n$ sind äquivalent

1) η ist X-Int.kurve

2) $\gamma - \eta$ ist Y-Int.kurve

Bew: $\frac{d}{dt} \gamma - \eta \big|_t = (\gamma' - \eta')(t)$

$$= A(t)\gamma(t) - \eta'(t)$$

Also $\eta'(t) = A(t)\eta(t)$ g.d.w

$$(\gamma' - \eta')(t) = A(t)(\gamma(t) - \eta(t)).$$

$\blacksquare$