Reduktion nach d'Alembert

$A : I \to \mathbb{M}_{n\times n}$ stetig

Idee: Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine nicht-triviale Lösung von

$$\gamma'(t) = A(t)\gamma(t) \qquad (*)$$

Der Lösungsraum $\mathcal{L}$ hat Dim n.

Wir suchen $n-1$ weitere Lösungen, die γ zu einer Basis ergänzen.

Man kann sie als Lösungen zu einer linearen DGL im $\mathbb{R}^{n-1}$ erhalten

Ansatz:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

Da $\gamma \neq 0$ ist gibt es einen Index k mit $\gamma_k \not\equiv 0$ (d.h. $\gamma_k(t) \neq 0$ für ein t).

Betrachte

$$\eta(t) := \varphi(t)\gamma(t) + \zeta(t)$$

mit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ und $\zeta : I \to \mathbb{R}^n$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \zeta_1(t) \\ \vdots \\ \zeta_n(t) \end{pmatrix}$$

wobei wir $\xi_k \equiv 0$ fordern.

<u>Dann</u> gilt:

$$\eta'(t) = \varphi'(t)\gamma(t) + \varphi(t)\gamma'(t) + \xi'(t) \qquad (\square)$$

<u>Ziel:</u> Bestimme φ und ξ so, daß η eine Lösung von $(*)$ wird, d.h.

$$\eta'(t) = A(t)\,\eta(t)$$

<u>Also:</u>

$$\varphi'(t)\gamma(t) + \varphi(t)\gamma'(t) + \xi'(t) = A(t)\big(\varphi(t)\gamma(t) + \xi(t)\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi'(t)\gamma(t) + \varphi(t)A(t)\gamma(t) + \xi'(t) = \varphi(t)A(t)\gamma(t) + A(t)\xi(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi'(t)\gamma(t) + \xi'(t) = A(t)\xi(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \xi'(t) = A(t)\xi(t) - \varphi'(t)\gamma(t) \qquad (\circ)$$

Wir verwerten nun unsere Setzung $\xi_k \equiv 0$ und bestimmen φ':

$$0 = [\xi'(t)]_k = [A(t)\xi(t) - \varphi'(t)\gamma(t)]_k$$

k-te Koordinate

$\underline{\text{D.h.:}}$ $$\varphi'(t)\,\gamma_k(t) = [A(t)\,\xi(t)]_k \quad \longleftrightarrow (1)$$

$$= (a_{k-}(t)) \cdot \xi(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)\,\xi_j(t)$$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\gamma_k(t)} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)\,\xi_j(t)$$

Einsetzen in (0) ergibt für $i \neq k$:

$$\xi_i'(t) = (a_{i-}(t)) \cdot \xi(t) - \frac{\gamma_i(t)}{\gamma_k(t)} \sum_{j \neq k} a_{kj}(t)\,\xi_j(t) \quad \leftarrow \xi_k(t) = 0$$

$$= \sum_{j \neq k} a_{ij}(t)\,\xi_j(t) - \frac{\gamma_i(t)}{\gamma_k(t)} \sum_{j \neq k} a_{kj}(t)\,\xi_j(t)$$

$$= \sum_{j \neq k} \underbrace{\left(a_{ij}(t) - \frac{\gamma_i(t)}{\gamma_k(t)} a_{kj}(t) \right)}_{=:\, b_{ij}(t)} \xi_j(t)$$

$$B := (b_{ij})_{i,j \neq k}$$

O.B.d.A.: $k = n$

$$\begin{pmatrix} \zeta_1'(t) \\ \vdots \\ \zeta_{n-1}'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{ij}(t) \end{pmatrix}}_{n-1 \times n-1} \begin{pmatrix} \zeta_1(t) \\ \vdots \\ \zeta_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Also: Wir erhalten ein homogenes lineares System für $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$.

Bsp: $A(t) = \begin{pmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}(t)$

Beob: $\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ erfüllt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$$

Weder t^2 noch $-t$ verschwinden identisch.

K=1: $\zeta(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2(t) \end{pmatrix}$

$$\zeta_2'(t) = \left(a_{22}(t) - \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)} a_{12}(t) \right) \zeta_2(t)$$

$$= \left(2/t - \frac{-t}{t^2}(-1) \right) \zeta_2(t)$$

$$= \left(2/t - 1/t \right) \zeta_2(t)$$

$$= \frac{1}{t} \zeta_2(t)$$

Die allg. Lösung von $f'(x) = \frac{1}{x} f(x)$

lautet $f(x) = cx$.

Also: $\zeta_2(t) = ct$ $\quad$ ($c \in \mathbb{R}$ fest)

Wir benötigen bloß eine Lösung, also wählen wir $c = 1$.

$\rightsquigarrow$ $\underline{\zeta_2(t) = t}$

Damit ergeben sich $\varphi'(t)$ und $\varphi(t)$:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\gamma_1(t)} \sum_{j \neq k} a_{kj}(t)\, \zeta_j(t)$$

$$= \frac{1}{t^2}\, a_{12}(t)\, \zeta_2(t)$$

$$= \frac{1}{t^2} \cdot (-1)\, t = -\frac{1}{t}$$

$$\varphi(t) = -\ln(t) \qquad \text{für } t > 0$$

<u>Damit</u>: $\eta(t) = \varphi(t)\gamma(t) + \zeta(t)$

$$= -\ln(t)\begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -t^2 \ln(t) \\ t + t\ln(t) \end{pmatrix}$$

<u>Probe</u>: $$\eta'(t) = \begin{pmatrix} -2t\ln(t) - t^2 \frac{1}{t} \\ 1 + \ln(t) + t\frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2t\ln(t) - t \\ 2 + \ln(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t)\,\eta(t) = \begin{pmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t^2 \ln(t) \\ t + t\ln(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -t\ln(t) \quad - t - t\ln(t) \\ -\ln(t) \quad + 2 \quad + 2\ln(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2t\ln(t) - t \\ 2 + \ln(t) \end{pmatrix}$$

$$= \eta'(t)$$

<u>Also</u>: Die allg. Lösung ist $(t > 0)$

$$\alpha \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -t^2 \ln(t) \\ t + t\ln(t) \end{pmatrix}$$

Wir hätten auch $k=2$ wählen können:

$$\zeta(t) = \begin{pmatrix} \zeta_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\zeta_1'(t) = a_{11}(t)\,\zeta_1(t) - \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_2(t)}\,a_{21}(t)\,\zeta_1(t)$$

$$= \left(1/t - \frac{t^2}{-t}\; 1/t^2 \right) \zeta_1(t)$$

$$= \left(\frac{1}{t} - 1/{-t} \right) \zeta_1(t)$$

$$= 2/t\; \zeta_1(t)$$

z.B. $\zeta_1(t) = t^2$ tut's.

Damit ergeben sich φ' und φ wiefolgt:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\gamma_2(t)}\, a_{21}(t)\,\zeta_1(t)$$

$$= \frac{1}{-t}\; 1/t^2\; t^2 = -\frac{1}{t}$$

$$\varphi(t) = -\ln(t)$$

hm ...

Damit erhalten wir die unabh. Lösung

$$\mu(t) = \varphi(t)\,\gamma(t) + \zeta(t)$$

$$= -\ln(t)\begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -t^2\ln(t) + t^2 \\ t\ln(t) \end{pmatrix}$$

<u>Beob</u>: $\mu(t) = \eta(t) + \gamma(t)$

<u>Bem</u>: Wir hätten auch mit der Wronski-Det. vorgehen können.

<u>Gesucht</u> $\eta(t) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ so daß $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \eta_1 \\ \gamma_2 & \eta_2 \end{pmatrix}$

ein Fundamentalsystem wird.

<u>Setze</u> $\varphi(t) := \det\begin{pmatrix} \gamma_1 & \eta_1 \\ \gamma_2 & \eta_2 \end{pmatrix}$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ wie eben.

$$\varphi(t) = \det\begin{pmatrix} t^2 & \eta_1 \\ -t & \eta_2 \end{pmatrix} = t^2\eta_2(t) + t\eta_1(t)$$

Satz von Liouville: $\varphi'(t) = \operatorname{tr}A(t)\,\varphi(t)$

Also: $\varphi(t)$ erfüllt $\varphi'(t) = \frac{3}{t}\varphi(t)$.

Damit: $\varphi(t) = c\,t^3$

Also: $c\,t^3 = t^2\eta_2(t) + t\,\eta_1(t)$

Für $\underline{c=1}$ erhalten wir

$$t^3 = t^2\eta_2(t) + t\,\eta_1(t)$$

$$t^2 = t\,\eta_2(t) + \eta_1(t)$$

$$\eta_1(t) = t^2 - t\,\eta_2(t)$$

Also: Wir suchen eine Lösung der Form

$$\eta : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 - t\,\psi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$$

Aus $\eta'(t) = A(t)\eta(t)$ ergibt sich

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2t - \psi(t) - t\psi'(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 - t\,\psi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$$

eine Gleichung reicht :)

Damit $$\psi'(t) = 1 - \frac{1}{t}\psi(t) + \frac{2}{t}\psi(t) = 1 + \frac{\psi(t)}{t}$$

$$\psi'(t) = 1 + \psi(t)/t$$

Wir raten $$\psi(t) = t + t\ln(t)$$

$$\psi'(t) = 1 + \ln(t) + t\,\frac{1}{t} = 2 + \ln(t)$$

$$= 1 + \frac{t + t\ln(t)}{t} = 1 + \frac{\psi(t)}{t}$$

Einsetzen: $$\eta(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t\psi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t^2 - t^2 - t^2\ln(t) \\ t + t\ln(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -t^2\ln(t) \\ t + t\ln(t) \end{pmatrix}$$

Das hatten wir bei d'Alembert mit $k = 1$ auch bekommen.