Wo stehen wir?

Betrachte

$$\gamma'(t) = A(t)\gamma(t) + b(t) \qquad (*)$$

$$\eta'(t) = A(t)\eta(t) \qquad (\star)$$

1) Wir haben gesehen, daß sich alle Lösungen zu $(*)$ aus einer festen Lösung γ_0 von $(*)$ und einem Fundamentalsystem $\eta_1, \dots, \eta_n$ zu $(\star)$ ergeben als Kombinationen

$$\gamma = \gamma_0 + \sum a_i \eta_i$$

2) Wir haben Methoden diskutiert, wie sich (unter einem guten Stern) ein System $\eta_1, \dots, \eta_n$ finden läßt.

⌜Na ja: wir haben eine Methode gesehen, die ab und zu hilft. Spezielle Fälle werden wir noch erörtern.⌟

Bleibt: Wie findet man γ_0?

Variation der Konstanten in mehreren Dimensionen

Sei $H(t) = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ein Fundamentalsystem zu $(\ast)$. Jede Lösung $\eta(t)$ von $(\ast)$ hat dann die Form

$$\eta(t) = H(t)\, u_0 \qquad u_0 \in \mathbb{R}^n$$

Ansatz: $\gamma(t) := H(t)\, u(t)$

Damit:

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= H'(t)\, u(t) + H(t)\, u'(t) \\ &= A(t)\, H(t)\, u(t) + H(t)\, u'(t) \\ &= A(t)\, \gamma(t) + \underbrace{H(t)\, u'(t)}\end{aligned}$$

hier soll $b(t)$ stehen!

Also: $\gamma(t)$ löst $(\ast)$ g.d.w. gilt:

$$b(t) = H(t)\, u'(t)$$

Beob: $H(t)$ ist ein Fundamentalsystem.

Daher ist $\det H(t) \neq 0$ für alle t.

Es gibt also für alle t die Inverse $H^{-1}(t)$.

Wir erhalten

$$H^{-1}(t)\, b(t) = u'(t)$$

Und damit

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} H^{-1}(s)\, b(s)\, ds$$

Für $u_0 = 0$ ergibt sich z.B. die Lösung

$$\gamma_0(t) = H(t) \int_{t_0}^{t} H^{-1}(s)\, b(s)\, ds$$

Addition der Lösung $H(t)\, u_0$ von $(*)$ ergibt dann eine Lösung des <u>inhom.</u> AWP:

<u>Satz:</u> Seien $A: I \to \mathbb{M}_{n\times n}$ und $b: I \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Das AWP

$$\left| \begin{aligned} \gamma' &= A(t)\gamma + b(t) \\ \gamma(t_0) &= u_0 \end{aligned} \right|$$

hat (genau) eine Lösung, nämlich

$$\gamma(t) = H(t)\, v_0 + H(t) \int_{t_0}^{t} H^{-1}(s)\, b(s)\, ds$$

wobei $H = (\eta_1 \cdots \eta_n)$ ein FS der homogenen DGL

$$\eta' = A(t)\,\eta$$

und $v_0 = H^{-1}(t_0)\, u_0$ ist.

<u>Bew:</u> $\gamma_0(t) = H(t) \int_{t_0}^{t} H^{-1}(s)\, b(s)\, ds$ ist spezielle Lösung von $(*)$ mit $\gamma_0(t_0) = 0$.

$$\eta(t) = H(t)\, v_0$$

ist eine Lösung zu $(*)$ mit:

$$\eta(t_0) = H(t_0)\, H^{-1}(t_0)\, u_0 = u_0$$

Also ist die Summe γ eine Lösung von $(*)$ mit $\gamma(t_0) = u_0 + 0 = u_0$. $\boxtimes$

Bsp:

$$\gamma'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{pmatrix}}_{A(t)} \gamma(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}}_{b(t)}$$

Das homogene System ist also:

$$\eta' = \begin{pmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{pmatrix} \eta$$

Vom letzten mal kennen wir ein Fundamentalsystem:

$$H(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln(t) \\ -t & t + t\ln(t) \end{pmatrix}$$

Erinnerung: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\det H(t) = t^3 + t^3 \ln(t) - t^3 \ln(t) = t^3$$

Also: $$H^{-1}(t) = \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} t + t\ln(t) & t^2 \ln(t) \\ t & t^2 \end{pmatrix}$$

$$H^{-1}(t)\, b(t) = \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} t + t\ln(t) & t^2 \ln(t) \\ t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} t^2 + t^2 \ln(t) - t^4 \ln(t) \\ t^2 - t^4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 + \ln(t) - t^2 \ln(t) \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_1^t H^{-1}(s) b(s)\, ds = \int_1^s \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 1 + \ln(s) - s^2 \ln(s) \\ 1 - s^2 \end{pmatrix} ds$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} t^2 - 1 + (4 - 2t^2 + 2\ln(t)) \ln(t) \\ 4\ln(t) - 2t^2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} t^2 - 1 + 4\ln(t) - 2t^2 \ln(t) + 2\ln^2(t) \\ 4\ln(t) - 2t^2 + 2 \end{pmatrix}$$

Schließlich ist

$$\gamma_0(t) = H(t) \int_1^t H^{-1}(s) b(s)\, ds$$

$$= \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln(t) \\ -t & t + t\ln(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} t^2 - 1 + 4\ln(t) - 2t^2 \ln(t) + 2\ln^2(t) \\ 4\ln(t) - 2t^2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} t^4 - t^2 + 2t^2 \ln(t) - 2t^2 \ln^2(t) \\ 3t - 3t^3 + 2t\ln(t) + 2t \ln^2(t) \end{pmatrix}$$

die spezielle Lösung mit $\gamma_0(1) = 0$.

Konstante Koeffizienten

Erinnerung: $e^{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ konvergiert abs.

Betrachtung: Sei $M: I \to \mathbb{M}_{n\times n}$ diffbar.

Wir suchen

$$\frac{d}{dt} e^{M(t)} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M(t)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{d}{dt}\left(M(t)^k\right)}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(M(t) \cdots M'(t) \cdots M(t)\right)$$

! **Wenn** $M(t)$ mit $M'(t)$ kommutiert

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, k\, M'(t)\, M(t)^{k-1}$$

$$= M'(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} M^{k-1}$$

oder hier

$$= M'(t)\, e^{M(t)} = e^{M(t)} M'(t)$$

Bsp: $M : I \longrightarrow \mathbb{M}_{n\times n}$

$\quad t \longmapsto tA$

Dann: $M'(t) = A$

$$M'(t)\,M(t) = A\,tA = tAA$$

$$= M(t)\,M'(t)$$

D.h.: M' und M kommutieren.

Kor: $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$

Anwendung: Wir betrachten das zeit<u>un</u>abhängige lin. System

$$\gamma'(t) = A\gamma(t) \qquad (*)$$

Beob: $H(t) := e^{tA}$ ist Fundamentalsystem für $(*)$: $H'(t) = Ae^{tA}$

Frage: Wie berechnen wir e^{tA}?

Beob: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

__Also:__ $e^{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$

Diagonalmatrizen sind also ganz einfach.

__Beob:__ $B = PAP^{-1}$ $\qquad P$: invertierbar

$$B^2 = PA\cancel{P^{-1}P}AP^{-1} = PA^2P^{-1}$$

$$\vdots$$

$$B^k = PA\cancel{P^{-1}P}AP^{-1} \cdots PAP^{-1} = PA^kP^{-1}$$

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PA^kP^{-1}}{k!}$$

$$= P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)P^{-1}$$

$$\boxed{e^{PAP^{-1}} = Pe^{A}P^{-1}}$$

__Kor:__ Ist A <u>diagonalisierbar</u>, d.h. gibt es invertierbares P und diagonales $D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ mit $A = PDP^{-1}$, so gilt:

$$e^A = P e^D P^{-1}$$

$$e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

<u>Bsp:</u> $N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N^k = \mathbb{1} + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$N(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad N(\alpha)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{N(\alpha)} = \mathbb{1} + N(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Bsp:</u> $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ & \lambda \end{pmatrix}^k = \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^k$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^k + k \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{+ \binom{k}{2} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k & \\ & \lambda^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\lambda^{k-1} & \\ & k\lambda^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k & \\ & \lambda^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha k \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k & \alpha k \lambda^{k-1} \\ & \lambda^k \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda^k & k\alpha\lambda^{k-1} \\ & \lambda^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^\lambda & \alpha e^\lambda \\ & e^\lambda \end{pmatrix} = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Insbesondere</u>: $e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ & e^\lambda \end{pmatrix}$

Jordanblock