

Def: Ein Jordanblock ist eine Matrix der Form

$$J_m(\lambda) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}}_m \Bigg\}^m$$

Prop:

$$H(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1+t & 1+t+\frac{t^2}{2} & \dots & 1+t+\dots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1+t+\frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & 1+t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

ist Fundamentalsystem für $\eta'(t) = J_m(\lambda) \eta(t)$.

Bew: Wir betrachten die hom. lin. DGL

$$\eta'(t) = J_m(\lambda) \eta(t) \quad \eta = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = \lambda x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = \lambda x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = \lambda x_3(t) + x_4(t) \\ \vdots \\ x_{m-1}'(t) = \lambda x_{m-1}(t) + x_m(t) \\ x_m'(t) = \lambda x_m(t) \end{array} \right.$$

Beh: Eine Lösung ist:

$$x_m(t) = e^{\lambda t}$$

$$x_{m-1}(t) = e^{\lambda t} + t e^{\lambda t}$$

$$\begin{aligned} \lceil x'_{m-1}(t) &= \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} + t \lambda e^{\lambda t} \\ &= \lambda (e^{\lambda t} + t e^{\lambda t}) + e^{\lambda t} \\ &= \lambda x_{m-1} + x_m \end{aligned} \quad \rfloor$$

$$x_{m-2}(t) = e^{\lambda t} + t e^{\lambda t} + \frac{t^2}{2} e^{\lambda t}$$

$$\begin{aligned} \lceil x'_{m-2}(t) &= \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} + t \lambda e^{\lambda t} + \frac{2t}{2} e^{\lambda t} + \frac{t^2}{2} \lambda e^{\lambda t} \\ &= \lambda \left(e^{\lambda t} + t e^{\lambda t} + \frac{t^2}{2} \right) + e^{\lambda t} + t e^{\lambda t} \\ &= \lambda x_{m-2}(t) + x_{m-1}(t) \end{aligned} \quad \rfloor$$

$$\begin{aligned} x_{m-k}(t) &= e^{\lambda t} + t e^{\lambda t} + \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} + \dots + \frac{t^k}{k!} e^{\lambda t} \\ &= x_{m-k+1}(t) + \frac{t^k}{k!} e^{\lambda t} \end{aligned}$$

$$\lceil x'_{m-k}(t) = x'_{m-k+1}(t) + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} + \frac{t^k}{k!} \lambda e^{\lambda t}$$

Induktion

$$= \lambda x_{m-k+1}(t) + x_{m-k+2}(t) + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} + \frac{t^k}{k!} \lambda e^{\lambda t}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \left(x_{m-k+1}(t) + \frac{t^k}{k!} e^{\lambda t} \right) + x_{m-k+2} + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} \\
&= \lambda x_{m-k}(t) + x_{m-k-1}(t)
\end{aligned}$$

Dieselbe Rechnung zeigt auch, daß

$$x_m = x_{m-1} = \dots = x_{m-j} = 0$$

$$x_{m-j-1}(t) = e^{\lambda t}$$

$$x_{m-j-2}(t) = e^{\lambda t} + t e^{\lambda t}$$

$$\begin{aligned}
x_{m-j-3}(t) &= e^{\lambda t} + t e^{\lambda t} + \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

eine Lösung ist.

D.h. Jede Spalte von $H(t)$ ist

Lösung von $\eta'(t) = J_m(\lambda) \eta(t)$.

Beob. $\det H(t) = (e^{\lambda t})^m \neq 0$

Also: $H(t)$ ist FS.



Bem.: Damit ist auch $H(t)Q$ ein FS für $\eta'(t) = J_m(\lambda)\eta(t)$ für jedes invertierbare Q .

Wählen wir speziell

$$Q := H(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

so erhalten wir das FS

$$X(t) := H(t)H(0)^{-1}$$

mit

$$X(0) = \underline{1}_n$$

D.h.: $e^{tJ_m(\lambda)} = X(t).$

Beob: Das charakteristische Polynom von $Z_m(\lambda)$ ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \chi_{Z_m(\lambda)}(t) &= \det(t \mathbb{1} - Z_m(\lambda)) \\ &= \det \begin{pmatrix} t-\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & t-\lambda \end{pmatrix} = (t-\lambda)^m \end{aligned}$$

Erinnerung: Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Dann gibt es eine invertierbare Begleitmatrix P und eine Matrix $Z = P^{-1}AP$ in Jordan-normalform

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{m_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & Z_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \quad n = m_1 + \dots + m_k$$

Die Jordannormalform ist bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke durch A eindeutig bestimmt.

Die λ_i ($i=1, \dots, k$) sind Eigenwerte von A . Für das charakteristische Polynom gilt:

$$\chi_A(t) = \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{m_i}$$

Bem: Kommt ein EW λ unter dem λ_i mehrfach vor, so ist die Summe der zugehörigen m_i die algebraische Vielfachheit von λ und ihre Anzahl ist die geometrische Vielfachheit von λ , d.h. die Dimension des Eigenraumes $E(\lambda)$

Bem: Die Blockgrößen m_i ergeben sich allgemein aus den Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume:

$$E_j(\lambda) = \ker (\lambda \mathbb{1} - A)^j$$

Kor: Sei $Z = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$ die

Jordannormalform von A . Dann ist

$$H(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} + t e^{\lambda_1 t} & \dots & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_k t} & \dots \end{pmatrix}$$

FS zu $\eta'(t) = Z \eta(t).$

Damit ist

$$\Gamma(t) = P H(t)$$

FS zu $\gamma'(t) = A \gamma(t).$

Bew: Daß $H(t)$ FS zu Z sieht man blockweise.

Dann: $\Gamma'(t) = P H'(t) = P Z H(t)$
 $= P Z P^{-1} P H(t) = A \Gamma(t).$

Ferner ist P als Begleitmatrix invertierbar.

Also: $\Gamma(t)$ ist FS zu $\gamma'(t) = A\gamma(t)$. $\square$

Bem: Jeder Eintrag von $H(t)$ ist von der Form $q(t) e^{\lambda t}$ für ein Polynom q und einen EW $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

Für $\Gamma(t) = PH(t)$ ergibt sich daher

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

mit Lin. Kombinationen $\mu_j \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$

$$x_i(t) = \sum_j p_{ij} q_j(t) e^{\mu_j t}$$

Das eröffnet einen Weg, $H(t)$ zu finden, denn die Begleitmatrix P zu bestimmen: Gehe alle möglichen Ansätze für die $x_i(t)$ durch.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 3) + 4 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 4 \\ &= (\lambda + 2)^2 \end{aligned}$$

Also: $\lambda = -1$ ist einziger EW

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad Z = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ansatz: $H(t) = \begin{pmatrix} (a+bt)e^{-t} \\ (c+dt)e^{-t} \end{pmatrix}$

$$H'(t) = \begin{pmatrix} be^{-t} - (a+bt)e^{-t} \\ de^{-t} - (c+dt)e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (b-a)e^{-t} - bt e^{-t} \\ (d-c)e^{-t} - dt e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$A H(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+bt)e^{-t} \\ (c+dt)e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [(a-c) + (b-d)t] e^{-t} \\ [(4a-3c) + (4b-3d)t] e^{-t} \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$b-a = a-c \quad \Leftrightarrow \quad b = 2a - c$$

$$-b = b-d \quad \Leftrightarrow \quad 2b = d$$

$$d-c = 4a-3c \quad \Leftrightarrow \quad d = 4a-2c = 2b$$

$$-d = 4b-3d \quad \Leftrightarrow \quad 2b = d$$

Also: $d = 2b = 4a - 2c$

Lösungen sind parametrisiert durch a und b

$$d = 2b$$

$$c = \frac{4a-2b}{2} = 2a - b$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} (a+bt) \\ (2a-b) + 2bt \end{pmatrix} e^{-t}$$