Bsp: $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} \lambda-3 & 5 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 + 10 = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda = \pm i$$

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} a e^{it} + b e^{-it} \\ c e^{it} + d e^{-it} \end{pmatrix}$$

$$H'(t) = \begin{pmatrix} ia e^{it} - ib e^{-it} \\ ic e^{it} - id e^{-it} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a e^{it} + b e^{-it} \\ c e^{it} + d e^{-it} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3a e^{it} + 3b e^{-it} - 5c e^{it} - 5d e^{-it} \\ 2a e^{it} + 2b e^{-it} - 3c e^{it} - 3d e^{-it} \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich:

$ia = 3a - 5c$ $\quad\quad ic = 2a - 3c$

$-ib = 3b - 5d$ $\quad\quad -id = 2b - 3d$

$$(3-i)a = 5c \qquad (3+i)c = 2a$$

$$5 = \frac{(3-i)(3+i)}{2} \checkmark$$

$$C = \frac{3-i}{5} a \qquad d = \frac{3-i}{5} b$$

Bem: e^{it} und e^{-it} sind komplex konjugiert.

Beh: $\overline{a} = b \iff \forall t : a e^{it} + b e^{-it} \in \mathbb{R}$

$\Gamma \Rightarrow$ ist klar: $a e^{it} + \overline{a} e^{-it} = a e^{it} + \overline{a e^{it}} \in \mathbb{R}$

$\Leftarrow$ Sei $a = r e^{i\varphi}$ $(r, \varphi \in \mathbb{R})$

Für $t = -\varphi$ erhalten wir

$$a e^{it} = r e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = r \in \mathbb{R}$$

und damit

$$b e^{-it} = b e^{i\varphi} \in \mathbb{R}$$

Also: $b = s e^{-i\varphi}$ für ein $s \in \mathbb{R}$.

Nun betrachte $t = 0$

$$a + b \in \mathbb{R} \qquad a = re^{i\varphi}$$
$$b = se^{-i\varphi}$$

Daher $r = s$, d.h. $\bar{a} = b$ $\square$

Beob: $\bar{a} = b \Rightarrow \bar{c} = d$

Also: Reelle Lösungen sind parametrisiert durch einen (!) komplexen Parameter a und

$$b := \bar{a}$$

$$c := \frac{3-i}{5} a$$

$$d := \frac{3-i}{5} \bar{a}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a e^{it} + b e^{-it} \\ c e^{it} + d e^{-it} \end{pmatrix}$$

Lineare Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \det \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & t - a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= t^2 - (a_{11} + a_{22})\, t + a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$$= t^2 - (\operatorname{tr} A)\, t + \det A$$

Nullstellen: $\lambda_{1,2} = \dfrac{(\operatorname{tr} A) \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}$

Möglichkeiten für JNF:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \overline{\lambda} \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

Im Fall zweier verschiedener reeller EWe sind die Eigenvektoren reell und lin. unabh. Also haben wir eine reelle Begleitmatrix.

Haben wir nur einen reellen EW λ, so gibt es zwei Möglichkeiten:

$$\dim_{\mathbb{R}} E_\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{JNF} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Begl.matrix reell

$$\dim_{\mathbb{R}} E_\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{JNF} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Begl. matrix reell

$\ulcorner$ $(\mathbb{1}\lambda - A)^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist 0-Abb. $\lrcorner$

Im Fall zweier konj. komplexer EWe λ und $\bar{\lambda}$ ist die JNF $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ und die EVn sind komplex und konjugiert zueinander: Sei $u = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R}^2)$ ein komplexer EV. zum EW λ.

Dann ist $\overline{u} = x - iy$ EV zu $\overline{\lambda}$.

Ferner sei $\lambda = a + ib$

<u>Dann:</u>

$$Au = \lambda u$$

$$A(x+iy) = (a+ib)(x+iy)$$

$$Ax + iAy = ax - by + i(bx+ay)$$

$$\left| \begin{array}{l} Ax = ax - by \\ Ay = ax + by \end{array} \right|$$

$$A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2×2 Matrix}}}{(x\ \ y)} = (Ax\ \ Ay) = (ax-by\ \ \ ax+by)$$

$$= (x\ \ y)\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

<u>Beob:</u> x, y sind lin. unabh über $\mathbb{C}$

wegen $u = x + iy$ $\quad \overline{u} = x - iy$

(u und $\overline{u}$ sind $\mathbb{C}$-unabh. weil EVn zu versch. EWn)

Kor: x, y sind Basis von $\mathbb{R}^2$

Bez. dieser Basis hat A die Darstellung $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

(D.h. A sieht aus wie eine Drehstreckung)

Satz: Zu jeder reellen 2×2 Matrix A hat der $\mathbb{R}^2$ eine Basis $P = (x \; y)$, so daß $P^{-1} A P$ eine der folgenden Formen hat:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad (\lambda = \mu \text{ möglich})$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha, \omega \in \mathbb{R}$$

Wir diskutieren die möglichen Fälle