$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

FS $$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

Allg. Lösung: $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

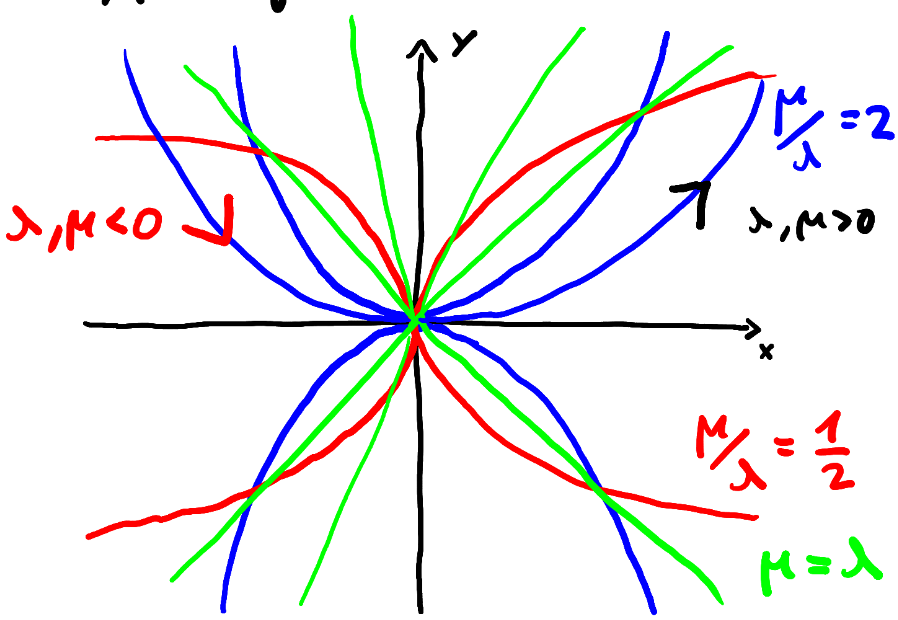
$$= \begin{pmatrix} a e^{\lambda t} \\ b e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten die Beziehung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\mu} = e^{\lambda \mu t} = \left(\frac{y}{b}\right)^{\lambda}$$

$$y = b \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}} = \frac{b}{a^{\mu/\lambda}} x^{\mu/\lambda} \qquad (a, b \neq 0)$$

λ, μ: gleiches Vorzeichen, d.h. $\mu/\lambda \geq 0$



$\mu/\lambda > 0$

„parabelartige" Trajektorien

Beob: $\lambda, \mu < 0 \Rightarrow$ alle Int. kurven fließen nach 0

stabil

$\lambda, \mu > 0 \Rightarrow$ alle Int. kurven fließen von 0 weg nach ∞.

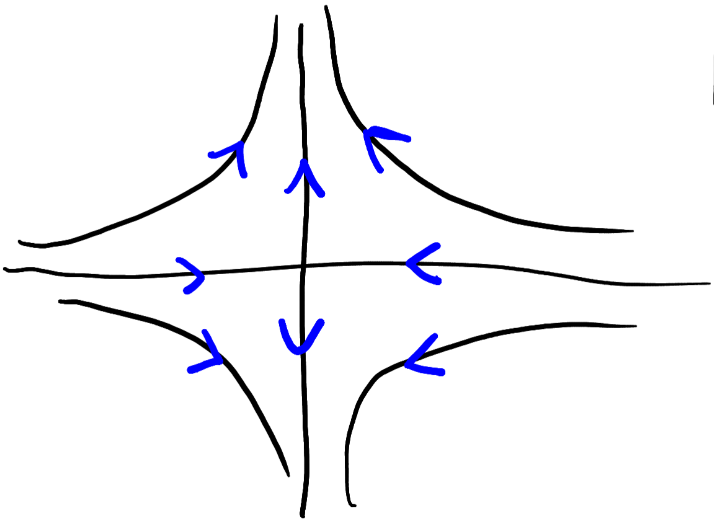
instabil

$a = 0 \Rightarrow x(t) = 0$

$b = 0 \Rightarrow y(t) = 0$

λ, μ: verschiedenes Vorzeichen $\quad \mu/\lambda < 0$

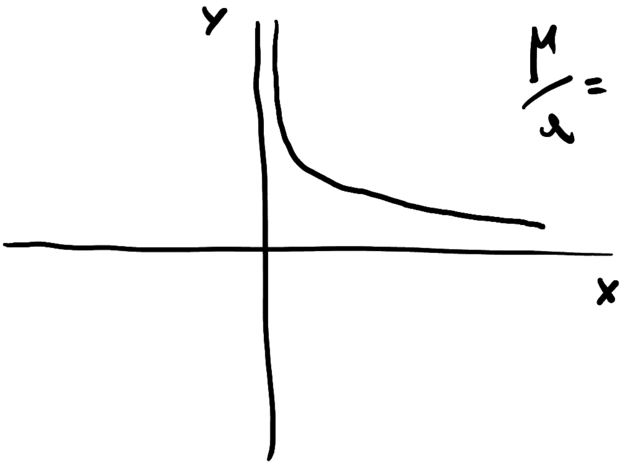
„hyperbelartige" Trajektorien



$\mu/\lambda = -1$

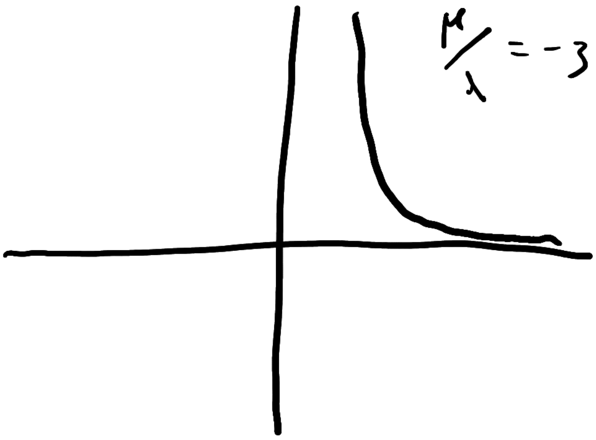
0 ist Sattelpunkt

instabil



$\mu/\lambda = -\frac{1}{2}$

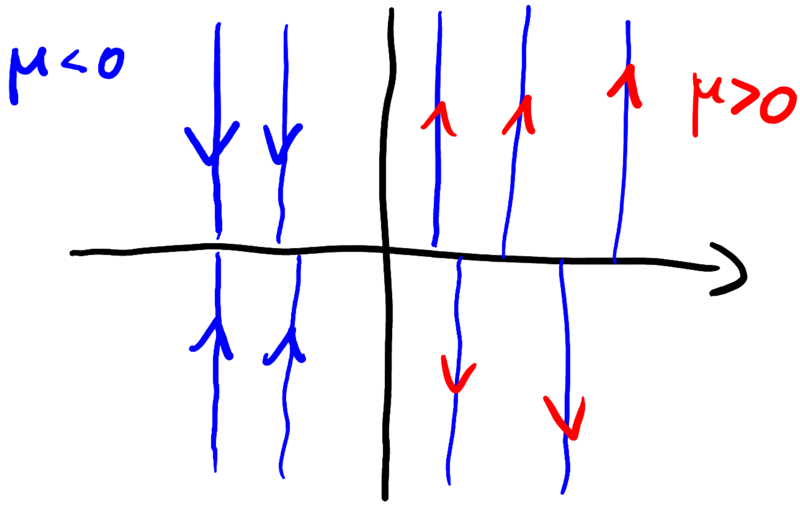
$y = k \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$



$\mu/\lambda = -3$

$y = k \cdot \frac{1}{x^3}$

$\underline{\lambda = 0}$ $\qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} a \\ b e^{\mu t} \end{pmatrix}$



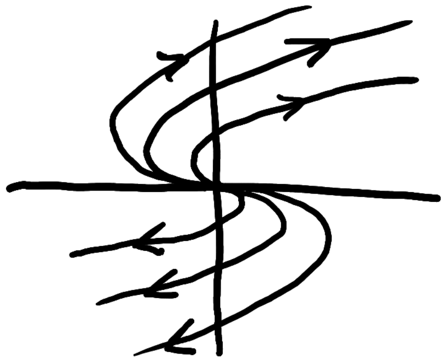
$\mu = 0$ analog

$\lambda = \mu = 0$: $\qquad \gamma(t)$: konstant

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a e^{\lambda t} + b t e^{\lambda t} \\ b e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

$a = 0$

$\lambda = 1$



$\underline{a = 0}$:

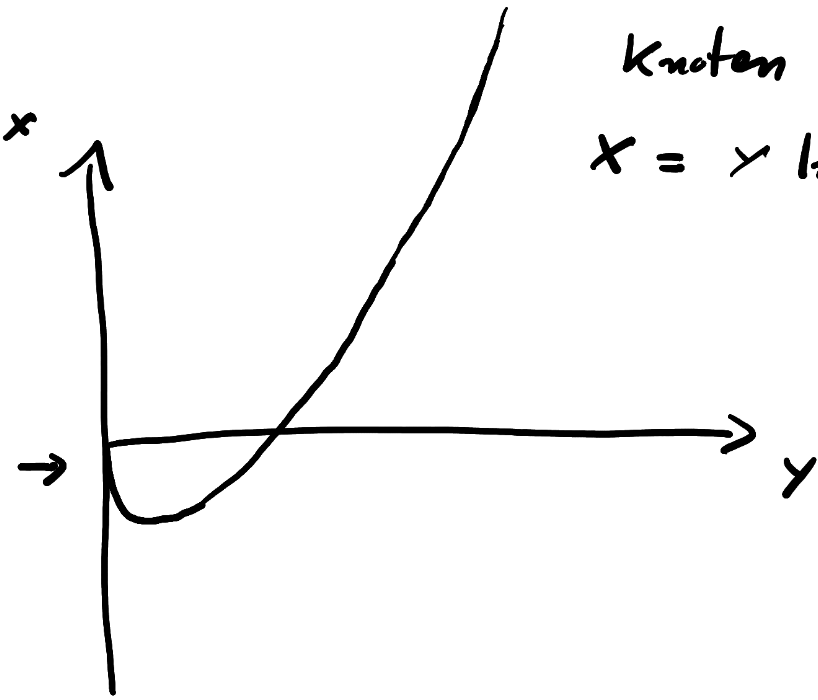
$$x = t b e^{\lambda t} = t y$$

$$t = \frac{\log\left(\frac{y}{b}\right)}{\lambda}$$

$$x = y \frac{\log\left(\frac{y}{b}\right)}{\lambda}$$

Knoten

$$x = y \ln(y)$$



vertikale Tangente !

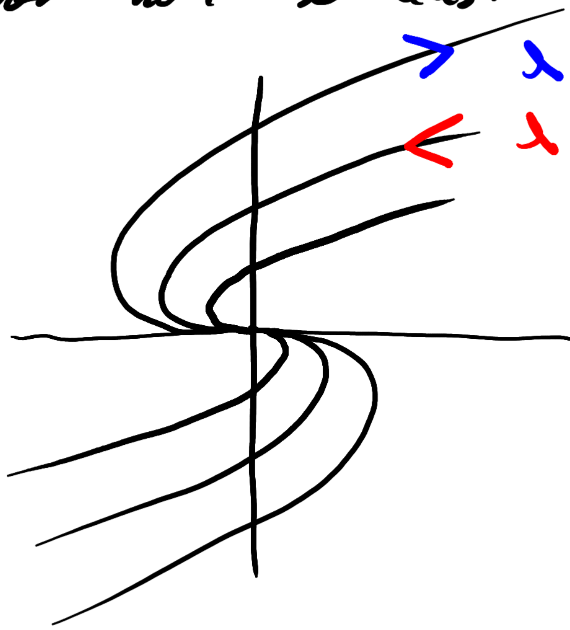
$\underline{a \neq 0}$

$$t = \frac{\log\left(\frac{y}{b}\right)}{\lambda}$$

$$x = t y + a e^{\log\left(\frac{y}{b}\right)}$$

$$= y \frac{\log\left(\frac{y}{b}\right)}{\lambda} + \frac{a}{b} y$$

sieht immer noch so aus:

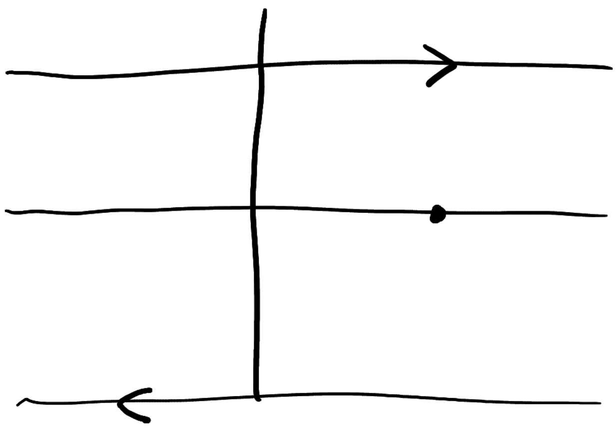


$\lambda > 0$ instabil

$\lambda < 0$ stabil

$\underline{\lambda = 0}$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bt \\ b \end{pmatrix}$$



$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

$$FS: \quad H(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

$$H'(t) = e^{\alpha t}\,\omega \begin{pmatrix} -\sin\omega t & \cos\omega t \\ -\cos\omega t & -\sin\omega t \end{pmatrix}$$

$$+ \alpha e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

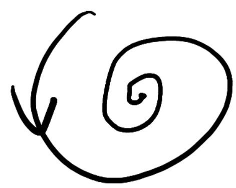
$$= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \left[a \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\sin\omega t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix} \right]$$

$\underline{\alpha = 0}$: Ellipsen um 0 <u>Strudel</u>

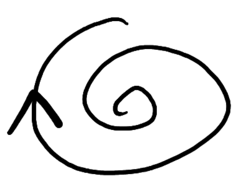
$\alpha \neq 0$: spiralen

$\alpha < 0$



stabil

$\alpha > 0$



instabil

Stabilität

Def $X : (a, \infty) \times U \to \mathbb{R}^n$ stetiges VF

$\gamma_0 : [t_0, \infty) \to U$ Int. kurve.

$u_0 := \gamma_0(t_0)$

Wir nennen γ_0 <u>stabil</u> (bei t_0), wenn gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so daß

1) zu jedem $u \in \mathbb{B}_\delta(u_0)$ die Int. kurve γ mit $\gamma(t_0) = u$ für alle Zeit definiert ist <u>und</u>

2) die Ungleichung

$$\| \gamma(t) - \gamma_0(t) \| < \varepsilon$$

für alle $t \in [t_0, \infty)$ gilt.

Wir nennen γ_0 <u>asymptotisch stabil</u>, wenn γ_0 stabil ist und überdies $\delta > 0$ existiert, so daß

$$\| \gamma(t) - \gamma_0(t) \| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

gilt für alle γ mit $\gamma(t_0) \in \mathbb{B}_\delta(u_0)$.

Eine Int. kurve γ heißt <u>instabil</u>, wenn sie nicht stabil ist.

<u>Satz</u>: Sei $X : (a, \infty) \times U \to \mathbb{R}^n$ stetig und im Raum lokal Lipschitzstetig. Seien $t_0, t_1 \in (a, \infty)$. Eine Int. kurve $\gamma_0 : (a, \infty) \to U$ ist stabil bei t_0 genau dann, wenn sie stabil ist bei t_1.

<u>Bew</u>: Wir betrachten den globalen Fluß

$$\Phi : D \to U$$
$$(t, \tau, u) \mapsto \gamma(t) \quad : \gamma(\tau) = u$$

Der Fluß ist stetig und es gilt

$$\Phi(t, s, \phi(s, \tau, u)) = \Phi(t, \tau, u)$$

Insbesondere gilt:

$$\Phi(t_1, t_0, -) \circ \Phi(t_0, t_1, -) = id$$

Sei nun γ_0 stabil bez. Anfangszeit t_0.

<u>setze</u>: $u_0 := \gamma_0(t_0)$ und $u_1 := \gamma_0(t_1)$

Beob: $\Phi(t_1, t_0, u_0) = u_1$

$\Phi(t_0, t_1, u_1) = u_0$

Sei γ_0 stabil bei t_0. Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ so gewählt, daß $\|\gamma(t) - \gamma_0(t)\| < \varepsilon$ ist für t groß genug, sofern $\gamma(t_0) \in \mathbb{B}_\delta(u_0)$ ist.

$\Phi(t_0, t_1, -)^{-1}(\mathbb{B}_\delta(u_0))$ ist offene Umg. von u_1.

Wähle $\bar\delta > 0$ so, daß $\mathbb{B}_{\bar\delta}(u_1) \subseteq \Phi(t_0, t_1, -)^{-1}(\mathbb{B}_\delta(u_0))$ gilt.

Für eine Int.kurve γ mit $\gamma(t_1) \in \mathbb{B}_{\bar\delta}(u_1)$ gilt dann $\gamma(t_0) \in \mathbb{B}_\delta(u_0)$ und somit $\|\gamma(t) - \gamma_0(t)\| < \varepsilon$ für t groß genug.

Damit ist eine Richtung gezeigt. Die andere ergibt sich durch Rollentausch von t_0 und t_1. ☒

Bem: Die analoge Aussage gilt (mit gleichem Beweis!) für asymptotische Stabilität [und Instabilität]. ☒

<u>Stabilitätssatz</u> (für lin. Systeme mit konst. Koeffizienten)

Wir betrachten das zeitunabh. lin. System

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(t, u) \mapsto Au$$

Sei $\mu := \max \{ \operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda : \text{EW von } A \}$.

Die triviale Lösung $\gamma_0 \equiv 0$ ist

a) asymptotisch stabil, wenn $\mu < 0$ ist

b) instabil, wenn $\mu > 0$ ist und

c) stabil, aber nicht asymptotisch stabil, wenn $\mu = 0$ ist und alle rein imaginären EW halbeinfach sind.

<u>Bew:</u> Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die Eigenwerte von A.

Die Int.kurven haben dann die Form

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) e^{\lambda_1 t} + \dots + p_{1k}(t) e^{\lambda_k t} \\ \vdots \\ p_{n1}(t) e^{\lambda_1 t} + \dots + p_{nk}(t) e^{\lambda_k t} \end{pmatrix}$$

wobei die $p_{ij}(t)$ Polynome in t sind.

Stabilität betrifft das Verhalten für $t \to \infty$.

Beob: $$e^{\lambda t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,\lambda < 0$$

Kor: Gilt $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ für alle i, so

gilt $\gamma(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

Ist $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$ für ein i, so

gilt $\gamma(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$

⌜ Der polynomiale Anteil ändert nix. ⌟

Beob $$|e^{\lambda t}| < C \quad \forall\, t \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$$

Kor: Gilt $\mathrm{Re}\,\lambda_i \leq 0$ für alle i, so

ist $\|\gamma(t)\|$ beschränkt, sofern

die Polynomfaktoren bei den $e^{\lambda_i t}$

mit $\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0$ keine Potenz von t

enthalten.

Das heißt: alle Jordanblöcke von λ_i sind 1×1. (λ_i: halbeinfach) $\boxtimes$