Beob: Sei A eine $n\times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq \alpha \qquad \forall i$$

Dann gibt es $c>0$, so daß

$$|e^{At}| \leq c\, e^{\alpha t}$$

für alle $t \geq 0$ gilt.

Bew: Eine Lösung der DGL $\gamma' = A\gamma$ hat die Form

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sum_i p_{1i}(t)\, e^{\lambda_i t} \\ \vdots \\ \sum_i p_{ni}(t)\, e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}$$

mit Polynomen p_{ji}. Das gilt insbesondere für die Spalten des FS

$$H(t) := e^{tA}$$

Es läßt sich (für $t \geq 0$) also jeder Matrixeintrag $\eta_{jk}(t)$ von $H(t)$ durch einen Ausdruck der Form $c_{jk} e^{\alpha t}$

von oben abschätzen. (Die Polynome machen den Kohl nicht fett.)

$c := \max c_{jk}$ tut's. $\boxtimes$

Stabilität

Lemma (Verallgemeinertes Lemma von Gronwald)

$I := [0, a]$

$f, h : I \to \mathbb{R}$ stetig

$\alpha : \in \mathbb{R}$

1) $h(t) \geq 0 \qquad \forall t \in I$

2) $f(t) \leq \alpha + \int_0^t h(s) f(s) \, ds$

Dann ist

$$f(t) \leq \alpha e^{H(t)} \qquad \forall t \in I$$

mit $H(t) = \int_0^t h(s) \, ds$

Bew: Übung

Def: Wir sagen, das VF $X : I \times U \to E$ hat **linearen Hauptteil**, wenn X von der Form

$$X_t(u) = Au + \varphi(t, u)$$

ist, wobei $A : E \to E$ linear ist (eine $n \times n$ Matrix!) und $\varphi : I \times U \to E$ stetig ist mit:

$$|\varphi(t,u)| \leq |u|\, \sigma(u)$$

d.h. $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall u \in \mathbb{B}_\delta(0)$
$|\varphi(t,u)| < \varepsilon |u|$

für ein stetiges $\sigma: E \to \mathbb{R}$ mit $\sigma(0)=0$.

<u>Beob:</u> $\varphi(t,u)$ verschwindet bei $u=0$ von höherer als erster Ordnung.
D.h. $\varphi(t,-)$ ist diff.bar bei $u=0$ mit Ableitung 0.

<u>Aber:</u> Hier ist die Diff.barkeit <u>uniform in t</u>.

<u>Also:</u> $X_t(u)$ hat bei $u=0$ Ableitung A und die lineare Approximation ist uniform in t.

<u>Beob:</u> Wegen $\varphi(t,0)=0$ ist $\gamma \equiv 0$ eine Int.kurve von X.

Rem: Sei $f(x,y)$ eine Funktion in zwei Variablen, dann gilt

$$\frac{d}{dt} f(t,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,t)$$

Bew: Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & f(t,t) \end{array}$$

Dann gilt:

$$D\Delta . h = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}$$

$$Df . \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v$$

Also mit Kettenregel

$$D(f \circ \Delta) . h = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} h$$

D.h.: $$\frac{d}{dt} f \circ \Delta = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} .$$

Kor: $$\frac{d}{dt} \int_0^t g(t,s)\,ds = g(t,t) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\,ds$$

Kor: $$\frac{d}{dt} \int_0^t e^{A(t-s)} \gamma(s)\,ds = \gamma(t) + A \int_0^t e^{A(t-s)} \gamma(s)\,ds$$

Satz: Sei $X: [0,a) \times U \to \mathbb{R}^n$ ein VF mit linearem Hauptteil A. Für alle EW λ_i von A sei $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$. Dann ist die Int.kurve $\gamma \equiv 0$ von X asymptotisch stabil.

Bew: Sei $X_t(u) = Au + \varphi(t,u)$.

Setze $\beta := \max(\lambda_i) < 0$.

Dann gibt es $c > 0$, so daß

$$|e^{At}| \leq c e^{\beta t} \qquad \forall\, t \geq 0$$

gilt.

Es gibt $\delta > 0$, so daß gilt $\qquad \varepsilon = \frac{-\beta}{2c}$

$$|\varphi(t,u)| \leq \frac{-\beta}{2c} |u| \qquad \forall\, u \in B_\delta(0)$$

Beh: Für jede Int.kurve γ mit

$$|\gamma(0)| < \frac{\delta}{c}$$

gilt $\quad |\gamma(t)| \leq \delta e^{\beta t/2}$

Bew: Wegen $\beta < 0$ folgt Stabilität.

Die DGL

$$\gamma'(t) = A\gamma(t) + \varphi(t, \gamma(t))$$

ist äquivalent zur Integralgleichung

$$(*) \qquad \gamma(t) = e^{At}\gamma(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\varphi(s, \gamma(s))\, ds$$

wie sich durch Ableiten leicht zeigt:

$$\gamma'(t) = A e^{At}\gamma(0) + A\int_0^t e^{A(t-s)}\varphi(s,\gamma(s))\,ds$$

$$+ \varphi(t, \gamma(t))$$

$$= A\gamma(t) + \varphi(t, \gamma(t))$$

Aus $(*)$ ergibt sich die Abschätzung

$$|\gamma(t)| \leq |\gamma(0)|\, c\, e^{\beta t} + \int_0^t c\, e^{\beta(t-s)} \underbrace{\frac{-\beta}{2c}|\gamma(s)|}_{\substack{\geq \text{ für } \gamma \text{ klein} \\ |\varphi(s,\gamma(s))|}} ds$$

sofern $\|\gamma\|_\infty < \delta$ ist.

Setze: $f(t) := |\gamma(t)|\, e^{-\beta t}$

Dann

$$f(t) \leq c|\gamma(0)| + e^{-\beta t} \int_0^t \cancel{c}\, e^{\beta t - \beta s} \frac{-\beta}{2\cancel{c}} |\gamma(s)| \, ds$$

$$= \underset{\overset{\wedge}{\delta}}{c|\gamma(0)|} + \int_0^t \frac{-\beta}{2} f(s) \, ds$$

Gronwall: $$f(t) \leq \delta \, e^{-\frac{\beta}{2} t}$$

$$|\gamma(t)| e^{-\beta t} \leq \delta \, e^{-\frac{\beta}{2} t}$$

$$\boxed{\beta < 0}$$

$$|\gamma(t)| \leq \delta \, e^{\frac{\beta}{2} t} \leq \delta \quad \forall t \qquad \square$$

Fakt: Hat mindestens ein EW λ_i von A $\mathrm{Re}\, \lambda_i > 0$, so ist $\gamma \equiv 0$ instabil.