Satz: Sei $X: [0,a) \times U \to \mathbb{R}^n$ ein VF mit linearem Hauptteil A. Für alle EW λ_i von A sei $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$. Dann ist die Int. kurve $\gamma \equiv 0$ von X asymptotisch stabil.

Bew: Sei $X_t(u) = Au + \varphi(t,u)$.

Setze $\beta := \max(\lambda_i) < 0$.

Dann gibt es $c > 0$, so daß

$$|e^{At}| \leq c e^{\beta t} \qquad \forall\, t \geq 0$$

gilt.

Es gibt $\delta > 0$, so daß gilt $\qquad \varepsilon = \frac{-\beta}{2c}$

$$|\varphi(t,u)| \leq \frac{-\beta}{2c} |u| \qquad \forall\, u \in B_\delta(0)$$

Beh: Für jede Int. kurve γ mit

$$|\gamma(0)| < \frac{\delta}{c}$$

gilt $\quad |\gamma(t)| \leq \delta e^{\beta t/2}$

Bem: Wegen $\beta < 0$ folgt Stabilität. ∇

Γ Die DGL

$$\gamma'(t) = A\gamma(t) + \varphi(t, \gamma(t))$$

ist äquivalent zur Integralgleichung

$$(*) \qquad \gamma(t) = e^{At}\gamma(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\varphi(s, \gamma(s))\, ds$$

wie sich durch Ableiten leicht zeigt:

$$\gamma'(t) = A e^{At}\gamma(0) + A\int_0^t e^{A(t-s)}\varphi(s,\gamma(s))\,ds$$

$$+ \varphi(t, \gamma(t))$$

$$= A\gamma(t) + \varphi(t, \gamma(t))$$

Aus $(*)$ ergibt sich die Abschätzung

$$|\gamma(t)| \le |\gamma(0)|\, c\, e^{\beta t} + \int_0^t c\, e^{\beta(t-s)} \underbrace{\frac{-\beta}{2c}|\gamma(s)|}_{\substack{\ge \text{ für } \gamma \text{ klein} \\ |\varphi(s,\gamma(s))|}}\, ds$$

sofern $|\gamma(s)| < \delta$ ist für $0 \le s \le t$.

Setze: $f(t) := |\gamma(t)|\, e^{-\beta t}$

Dann

$$f(t) \leq c|\gamma(0)| + e^{-\beta t} \int_0^t \cancel{c}\, e^{\beta t - \beta s} \frac{-\beta}{2\cancel{c}} |\gamma(s)|\, ds$$

$$= \underset{\underset{\delta}{\wedge}}{c|\gamma(0)|} + \int_0^t \frac{-\beta}{2} f(s)\, ds$$

Gronwald: $\quad f(t) \leq \delta\, e^{-\frac{\beta}{2} t}$

$$|\gamma(t)| e^{-\beta t} \leq \delta\, e^{-\frac{\beta}{2} t}$$

$$\boxed{\beta < 0}$$

$$|\gamma(t)| \leq \delta\, e^{\frac{\beta}{2} t} \leq \delta \quad \forall t \quad \lrcorner \quad \boxtimes$$

Fakt: Hat mindestens ein EW λ_i von A $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, so ist $\gamma \equiv 0$ instabil.

gezeigt: $\exists\ \beta<0\ :\quad \mathrm{Re}\,\lambda_i<\beta\quad \forall i$

$\exists\ c>1\ :\quad |e^{At}|\le c\,e^{\beta t}$

$\exists\ \delta\ :\quad \forall u\in\mathbb{B}_\delta(0)\quad |\varphi(t,u)|\le \frac{-\beta}{2c}|u|$

Gilt $|\gamma(0)|<\frac{\delta}{c}$ und ist $|\gamma(t)|<\delta$ für

für alle $t\in[0,a)$, so gilt auch $\quad|\forall a$

$$|\gamma(t)|<\delta e^{\frac{\beta}{2}t}\qquad\forall t\in[0,a)$$

Beh: Gilt $|\gamma(0)|<\frac{\delta}{c}$, so gilt $|\gamma(t)|<\delta$

für alle $t\ge 0$.

Bew: Andernfalls sei $t_0:=\inf\{t \mid |\gamma(t)|\ge\delta\}$.

Wegen $|\gamma(0)|<\frac{\delta}{c}$ und $c>1$ ist $t_0>0$

aus Stetigkeitsgründen.

Nun ist $|\gamma(t)|<\delta$ für $t\in[0,t_0)$.

Also folgt $|\gamma(t)|<\delta e^{\frac{\beta}{2}t}$ für $t\in[0,t_0)$

Mit Stetigkeit ergibt sich $|\gamma(t_0)|\le\delta e^{\frac{\beta}{2}t_0}<\delta$ ↯

Linearisierung

Sei $X: U \to \mathbb{R}^n$ ein zeitunabhängiges diff.bares VF, das an der Stelle $0 \in U$ verschwindet.

Dann ist

$$X(u) = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{X(0)} + \underset{\substack{\shortparallel \\ Au}}{D_0 X \cdot u} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{verschw. von} \\ \text{Ord.} \geq 1}}{\rho(u)}$$

<u>D.h.</u> X hat lin. Hauptteil $A = D_0 X$.

Die Ruhelage $\gamma \equiv 0$ ist also asympt. stabil, wenn $D_0 X$ nur Eigenwerte λ_i mit Realteil $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ hat und instabil wenn ein $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ ist.

<u>Def</u>: u ist hyperbolischer kritischer Punkt von X, wenn $X(u) = 0$ ist und alle EW von $D_u X$ Realteil $\neq 0$ haben.

Linearisierungssatz (Grobman-Hartman)

Sei u hyperbolischer kritischer Punkt von $X: U \to \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine offene Umg $V \ni u$ und eine offene Umg $W \ni 0$ und einen Homöomorphismus

$$\psi: V \longrightarrow W$$

so daß gilt:

1) $\psi(u) = 0$

2) Ist γ eine X-Int.kurve mit $\gamma(0) = u$, so ist $\psi \circ \gamma$ eine Int.kurve der Linearisierung bei u; und umgekehrt.

Die Methode von Lyapunov

$X : U \to \mathbb{R}^n$ zeitunabh. stetiges VF

$0 \in U$ und $X(0) = 0$

(Bem: also $\gamma_0 \equiv 0$ ist Int. kurve

und $u = 0$ ist Ruheposition)

Def (Lyapunov)

Die Ruhelage $u=0$ heißt *exponentiell stabil*, wenn es $\alpha, \beta, c > 0$ gibt, so daß für alle Int. kurven γ gilt:

$$|\gamma(0)| < \alpha \implies |\gamma(t)| < c e^{-\beta t} \quad \forall t > 0$$

Beob.: Ist $u=0$ exponentiell stabil und ist X lok. Lipschitz-stetig, so ist $\gamma_0 \equiv 0$ stabil (und denn auch asympt. stabil).

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht ist $\delta > 0$, so daß für γ mit $|\gamma(0)| < \delta$ gilt

$$|\gamma(t)| < \varepsilon \quad \forall\, t \geq 0.$$

Für $|\gamma(0)| < \alpha$ folgt $|\gamma(t)| < c e^{-\beta t}$.

Es gibt aber $t_0 > 0$ mit $c e^{-\beta t_0} < \varepsilon$.

Daher gilt $|\gamma(t)| < \varepsilon$ für $t \geq t_0$ automatisch.

Wegen stetiger Abhängigkeit von Anfangsbed. gibt es nunmehr $0 < \delta < \alpha$ mit

$$|\gamma(0)| < \delta \Rightarrow |\gamma(t)| < \varepsilon \text{ für } t \in [0, t_0]$$

(und $|\gamma(t)| < \varepsilon$ für $t \geq t_0$ sowieso)

Also ist $\gamma_0 \equiv 0$ stabil.

Wegen $|\gamma(t)| \leq c e^{-\beta t}$ ist überdies

$$\gamma(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 = \gamma_0(t)$$

und somit ist $\gamma_0 \equiv 0$ asympt. stabil. $\boxed{/\!/}$

<u>Def</u>: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ diff.bar. Dann heißt

$$X(f) : U \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto D_u f \cdot X(u) = \langle \nabla_u f \,/\, X(u) \rangle$$

die <u>Ableitung</u> von f <u>in Richtung</u> X.

Beob: $X(f)(u) = \frac{d}{dt} f(u + t X(u)) \Big|_{t=0}$ $\boxtimes$

Beob: Entlang einer Int. kurve γ gilt:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = X(f)(\gamma(t))$$

Bew:
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f \circ \gamma &= D_{\gamma(t)} f \cdot \gamma'(t) \\ &= D_{\gamma(t)} f \cdot X(\gamma(t)) \\ &= X(f)(\gamma(t)) \end{aligned}$$ $\boxtimes$

Def: Die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(U)$ heißt Lyapunov-Funktion für X, wenn gilt:

1) $f(0) = 0$
2) $f(u) > 0$ für $u \neq 0$
3) $X(f) \leq 0$ überall in U

Beob: Ist f eine Lyapunovfkt. für X und ist γ eine Int. kurve, so fällt $f \circ \gamma$ monoton wegen $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = X(\gamma(t)) \leq 0$.

Satz: Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ stetig mit Ruheposition $0 = X(0)$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine Lyapunovfkt. zu X. Dann ist $\gamma_0 \equiv 0$ stabil.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ mit $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(0) \subseteq U$. Wir suchen $\delta > 0$ mit:

$$|\gamma(0)| < \delta \Rightarrow |\gamma(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

Zunächst wähle $r > 0$, so daß

$$\inf f|_{\partial \mathbb{B}_\varepsilon(0)} > r \qquad \left(\begin{array}{l}\text{möglich,} \\ \text{weil } \partial \mathbb{B}_r(0) \\ \text{kompakt ist}\end{array}\right)$$

ist.

Kr: Ist $f(\gamma(t)) < r$ für alle t, so schneidet γ die Sphäre $\partial \mathbb{B}_\varepsilon(0)$ nicht.

Wähle $0 < \delta < \varepsilon$ so, daß $f(u) < r$ ist für alle $u \in \mathbb{B}_\delta(0)$. Das ist möglich, weil f stetig ist und $f(0) = 0 < r$ ist.

Für jedes $u \in \mathbb{B}_\delta(0) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(0)$ existiert eine Int.kurve γ_u mit $\gamma_u(0) = u$, ggf. aber nur für endl. Zeit.

Da $f(\gamma_u(t))$ monoton fällt, mit

$$0 \leq f(\gamma_u(0)) = f(u) < r$$

anfängt und somit $\partial \mathbb{B}_\varepsilon(0)$ niemals kreuzt, ist $\gamma_u(t) \in \mathbb{B}_\varepsilon(0)$ für jedes t im Def.bereich von γ_u.

Wir kennen die Gründe, aus denen γ_u nur für endl. Zeit erklärt sein könnte:

1) γ_u läuft aus U hinaus

⌜stimmt nicht, weil $\mathbb{B}_\varepsilon(0) \subseteq U$⌟

2) γ_u haut nach ∞ ab

⌜stimmt auch nicht. γ_u bleibt in $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$⌟

Also: γ_u existiert für alle Zeit und bleibt in $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$. ☒