Beob: $$X(f)(u) = \frac{d}{dt} f(u + t X(u)) \Big|_{t=0} \qquad \boxtimes$$

Beob: Entlang einer Int. kurve γ gilt:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = X(f)(\gamma(t))$$

Bew: $$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f \circ \gamma &= D_{\gamma(t)} f \cdot \gamma'(t) \\ &= D_{\gamma(t)} f \cdot X(\gamma(t)) \\ &= X(f)(\gamma(t)) \end{aligned} \qquad \boxtimes$$

Def: Die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(U)$ heißt Lyapunov-Funktion für X, wenn gilt:

1) $f(0) = 0$
2) $f(u) > 0$ für $u \neq 0$
3) $X(f) \leq 0$ überall in U

Beob: Ist f eine Lyapunovfkt. für X und ist γ eine Int. kurve, so fällt $f \circ \gamma$ monoton wegen $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = X(\gamma(t)) \leq 0$.

Satz: Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ stetig mit Ruheposition $0 = X(0)$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine Lyapunovfkt. zu X. Dann gilt

1) $\gamma_0 \equiv 0$ ist stabil.

2) Ist $X(f) < 0$ auf $U \setminus \{0\}$, so ist $\gamma_0 \equiv 0$ asympt. stabil.

3) Gibt es $\alpha, \beta, c > 0$ mit

   a) $X(f)(u) \leq -\alpha f(u)$

   b) $f(u) \geq c|u|^\beta$

   $\forall u \in U$

   so ist die Ruhelage exponentiell stabil.

Bew: 1) Sei $\varepsilon > 0$ mit $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(0) \subseteq U$. Wir suchen $\delta > 0$ mit:

$$|\gamma(0)| < \delta \Rightarrow |\gamma(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

Zunächst wähle $r > 0$, so daß

$$\inf f|_{\partial \mathbb{B}_\varepsilon(0)} > r$$

(möglich, weil $\partial \mathbb{B}_r(0)$ kompakt ist)

ist.

Kr: Ist $f(\gamma(t)) < r$ für alle t, so schneidet γ die Sphäre $\partial \mathbb{B}_\varepsilon(0)$ nicht.

Wähle $0 < \delta < \varepsilon$ so, daß $f(u) < r$ ist für alle $u \in \mathbb{B}_\delta(0)$. Das ist möglich, weil f stetig ist und $f(0) = 0 < r$ ist.

Für jedes $u \in \mathbb{B}_\delta(0) \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(0)$ existiert eine Int.kurve γ_u mit $\gamma_u(0) = u$, ggf. aber nur für endl. Zeit.

Da $f(\gamma_u(t))$ monoton fällt, mit

$$0 \le f(\gamma_u(0)) = f(u) < r$$

anfängt und somit $\partial \mathbb{B}_\varepsilon(0)$ niemals kreuzt, ist $\gamma_u(t) \in \mathbb{B}_\varepsilon(0)$ für jedes t im Def.bereich von γ_u.

Wir kennen die Gründe, aus denen γ_u nur für endl. Zeit erklärt sein könnte: 1) γ_u läuft aus U hinaus

⌜stimmt nicht, weil $\mathbb{B}_\varepsilon(0) \subseteq U$⌟

2) γ_u haut nach ∞ ab

⌈stimmt auch nicht.

γ_u bleibt in $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$ ⌋

<u>Also:</u> γ_u existiert für alle Zeit und bleibt in $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$.

2) Zu $\varepsilon > 0$ mit $\mathbb{B}_\varepsilon(u) \subseteq U$ wählen wir $\delta > 0$ wie eben. Sei $\gamma : [0, \infty) \to U$ eine Int. kurve mit $\gamma(0) \in \mathbb{B}_\delta(0)$. Dann ist $\gamma(t) \in \mathbb{B}_\varepsilon(0)$ für $t \geq 0$. Ferner fällt $f(\gamma(t))$ monoton. Daher existiert

$$0 \leq \eta := \lim_{t \to \infty} f(\gamma(t)) \leq f(\gamma(t)) < \varepsilon$$

Dann ist

wie in (1)

$$A := \{ u \in \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(0) \mid \eta \leq f(u) \leq r \}$$

kompakt. Die Funktion $X(f)$ nimmt also auf A ein Maximum $a \leq 0$ an.

<u>Beob:</u> Ist $\eta > 0$, so ist $a < 0$.

Beob: Ist $a<0$, so wird $f(\gamma(t))$ negativ wegen

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = X(f)(\gamma(t)) \leq a < 0$$

Also: $\eta = 0$

Beh: $\gamma(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

⌈ Für $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ nimmt f auf dem Kompaktum $\overline{B_\varepsilon}(0) \setminus B_{\varepsilon'}(0)$ ein Minimum $d>0$ an.

Für großes t ist $f(\gamma(t)) < d$.

Also ist $\gamma(t) \notin \overline{B_\varepsilon}(0) \setminus B_{\varepsilon'}(0)$.

Mit $|\gamma(t)| < \varepsilon$ folgt $\gamma(t) \in B_{\varepsilon'}(0)$.

3) Annahmen:

a) $X(f)(u) \leq -\kappa f(u)$

b) $f(u) \geq c|u|^3$

$\forall u \in U$

Aus a) folgt

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = X(f)(\gamma(t)) \leq -\alpha\, f(\gamma(t))$$

und damit $\quad f(\gamma(t)) \leq f(\gamma(0))\, e^{-\alpha t}$

für $t \geq 0$

Aus b) folgt

$$c|\gamma(t)|^{\beta} \leq f(\gamma(t))$$

und damit

$$c|\gamma(t)|^{\beta} \leq f(\gamma(0))\, e^{-\alpha t}$$

$$|\gamma(t)|^{\beta} \leq K e^{-\alpha t}$$

$$|\gamma(t)| \leq K^{1/\beta} e^{-\frac{\alpha}{\beta} t}$$

Damit fällt $\gamma(t)$ exponentiell schnell gegen 0. $\boxtimes$

$X: U \to \mathbb{R}^n$ lok. Lipschitzstetig, zeitunabh.

Für $u \in U$ sei γ_u die Int.kurve mit $\gamma_u(0) = u$.

Def: Ein $x \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>ω-Limespunkt</u> von $\gamma = \gamma_u$, wenn gilt:

1) $\gamma(t)$ existiert für alle $t \geq 0$

2) $\exists$ Folge $t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ mit $\gamma(t_k) \to x$

Die Menge $L^+(u)$ aller ω-Limespunkte heißt ω-Limesmenge.

Analog sind α-Limespunkte und die α-Limesmenge $L^-(u)$ erklärt.

Für eine Teilmenge $V \subseteq U$ bezeichnet

$$L^{\pm}(V) := \bigcup_{v \in V} L^{\pm}(v)$$

die Vereinigung der Limesmengen zu den Punkten $v \in V$.

Beob: Ist $u = \gamma(s)$ und $v = \gamma(t)$ für eine Int.kurve γ, so ist $L^{\pm}(u) = L^{\pm}(v)$.

Bew: X ist zeitunabhängig. Was in der Zukunft (Vergangenheit) von u liegt sehen wir entlang γ. Damit geschieht es auch in der Zukunft (Vergangenheit) von v. ☒

Def: Eine Teilmenge $D \subseteq U$ heißt <u>positiv invariant</u> / neg. inv. / inv., wenn für jedes $u \in D$ gilt

(pos. inv.) $\quad \forall t \geq 0 : \gamma_u(t) \in D$

(neg. inv.) $\quad \forall t \leq 0 : \gamma_u(t) \in D$

(inv.) $\quad \forall t : \gamma_u(t) \in D$

Beob: 1) $\gamma(\mathbb{R}_{\geq t_0})$ ist pos. inv.

$\gamma(\mathbb{R}_{\leq t_0})$ ist neg. inv.

$\gamma(\mathbb{R})$ ist inv.

2) Ist γ_u periodisch, so ist $\gamma_u(\mathbb{R}_{\geq t_0}) = L^{+}(u)$.

3) Sind A und B (pos/neg) inv., so

ist $A \cup B$ (pos/neg) inv.

$\ulcorner$ **Kor:** Jede Teilmenge $V \subseteq U$ enthält eine eind. best. maximale (pos/neg) invariante Teilmenge. $\lrcorner$

4) Existiert $\gamma_u(t)$ für alle $t \geq 0$, so gilt $\gamma_u(\mathbb{R}_{\geq 0}) \subseteq L^+(u)$ sofern $L^+(u)$ die Halbtrajektorie $\gamma_u(\mathbb{R}_{\geq 0})$ schneidet.

$\ulcorner$ Sei $\gamma_u(\tau) \in L^+(u)$, d. h. es gibt eine Folge $t_k \longrightarrow \infty$ mit

$$\gamma_u(\tau) = \lim_{k \to \infty} \gamma_u(t_k)$$

Für einen andern Punkt $\gamma_u(\tau + \Delta)$ auf der Trajektorie folgt dann mit stetiger Abh.:

$$\gamma_u(t_k + \Delta) = \gamma_{\gamma_u(t_k)}(\Delta) \xrightarrow[k \to \infty]{} \gamma_{\gamma_u(\tau)}(\Delta) = \gamma_u(\tau + \Delta)$$

Also ist $\gamma_u(\tau + \Delta) \in L^+(u)$. $\lrcorner$

5) Für eine pos. inv. Teilmenge $D \subseteq U$ gilt: $D = \{ \gamma_u(\mathbb{R}_{\geq 0}) \mid u \in D \}$ ([neg.] inv. analog)

$\ulcorner$ Folgt mit 4) $\lrcorner$