<u>Satz:</u> Sei $K \subseteq U$ kompakt, sei $\gamma : I \to U$ eine Int.kurve mit

$$\gamma(I \cap \mathbb{R}_{\geq 0}) \subseteq K$$

Dann existiert $\gamma(t)$ für alle $t \geq 0$, und $L^+ \subseteq K$ ist nicht leer, kompakt zusammenhängend und invariant.

Ferner gilt:

$$\lim_{t \to \infty} \operatorname{dist}(\gamma(t), L^+) = 0$$

Insbesondere existiert γ_v auf ganz $\mathbb{R}$ für jedes $v \in L^+$.

<u>Bew:</u> Da γ das Kompaktum K nicht verläßt, haut γ nicht nach ∞ ab und verläßt auch nicht U. Also existiert γ für alle $t \geq 0$.

Jede Folge $\gamma(t_k)$ hat einen Häufungspunkt und alle diese Häufungspunkte liegen im K. Also ist $L^+ \subseteq K$.

<u>Beh:</u> L^+ ist abgeschlossen (also kompakt).

⌜ Ein Häufungspunkt von Häufungspunkten ist ein Häufungspunkt. ⌟

<u>Beh:</u> L^+ ist zusammenhängend.

⌜ Andernfalls gibt es kompakte Mengen

$$L^+ = A \cup B \qquad A \cap B = \emptyset$$

mit $\operatorname{dist}(A, B) > 3\varepsilon > 0$.

Die Halbtrajektorie $\gamma(\mathbb{R}_{\geq 0})$ kommt A und B für bel. große t immer wieder beliebig nahe, kreuzt also <u>unendl. oft</u> den kompakten Bereich

$$K \setminus \mathrm{Nbhd}_\varepsilon(A) \cup \mathrm{Nbhd}_\varepsilon(B)$$

und hat darin auch Häufungspunkte. Das widerspricht $L^+ \subseteq A \cup B$. ⌟

__Beh:__ L^+ ist invariant.

$\ulcorner$ Sei $L^+ \ni x = \lim_{k \to \infty} \gamma(t_k)$ für eine Folge $t_k \to \infty$.

Für t_k ist $t \mapsto \gamma(t - t_k)$ eine X-Int.kurve (X ist zeitunabh.), die für $t \geq -t_k$ $(\longrightarrow -\infty)$ existiert.

__Also:__ x ist Limes von Punkten $u_k = \gamma(t_k)$ so daß γ_{u_k} für $t \geq -1000$ existiert, sofern k groß genug ist.

Stetige Abhängigkeit:

$$\lim_{k \to \infty} \gamma_{u_k}(s) =: \gamma(s)$$

existiert für $s > -1000$ und ist Int.kurve mit $\gamma_x(0) = \lim u_k = x$.

-1000 war beliebig und die Int.kurve durch x ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Jeder Punkt auf γ_x ist Limes von

Punkten $\gamma_{u_k}(s)$, d.h. ein Punkt in L^+. $\square$

Beh: $\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\gamma(t), L^+) = 0$

L^+ ist kompakt und U ist offen. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $Nbhd_\varepsilon(L^+) \subseteq U$.
Eine Folge $t_k \to \infty$ mit $\gamma(t_k) \notin Nbhd_\varepsilon(L^+)$ kann es nicht geben, denn sie hätte in $K \setminus L^+$ einen Häufungspunkt, der ja in L^+ läge. $\square$

Def: Sei $X : I \times U \to \mathbb{R}^n$ stetig und $0 \in U$ sei eine Ruhelage, d.h. $X(0) = 0$. Ferner sei $\gamma_0 \equiv 0$ asympt. stabil. Die Menge

$$\mathcal{E}(0) := \{ u \in U \mid \gamma_u(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \}$$

heißt <u>Einzugsbereich</u> von 0.

Ist $D \subseteq U$ pos. inv., so bezeichnet

$$\mathcal{E}(D) := \{ u \in U \mid \operatorname{dist}(D, \gamma_u(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \}$$

den Einzugsbereich von D.

Gilt $\mathcal{E}(D) \supseteq \mathrm{Nbhd}_\varepsilon(D)$ für ein $\varepsilon > 0$, so heißt D ein Attraktor.

Ist $U = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{E}(D) = \mathbb{R}^n$, so heißt D globaler Attraktor.

Also: Eine einpunktige Menge $D = \{v\}$ ist ein Attraktor g.d.w. $\gamma \equiv v$ asympt. stabil ist.

Prop: Sei $V \subseteq U$ offen,

$f: V \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar

$X(f) \leq 0$ überall in V

Für einen Wert $\alpha \in f(V)$ sei die Menge

$$V_\alpha := \{ v \in V \mid f(v) \leq \alpha \}$$

kompakt. <u>Dann</u> gilt:

1) Jede max. Int.kurve $\gamma_v(t)$ mit $\gamma_v(0) = v \in V_\alpha$ existiert für alle $t \geq 0$.

2) V_α ist pos. inv.

3) Für $v \in V_\alpha$ ist $L^+(v) \subseteq V_\alpha$ nicht leer und $X(f)$ verschwindet auf der Menge $L^+(v)$.

<u>Bew</u>: Sei γ eine Int.kurve mit $v = \gamma(0) \in V_\alpha$.

Dann ist

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = X(f)(\gamma(t)) \leq 0$$

solange $\gamma(t)$ in V_α bleibt. Auf der anderen seite kann dann $f(\gamma(t))$ auch nicht wachsen und γ somit V_α nicht verlassen.

Es folgt a) γ existiert auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$

b) $\gamma(\mathbb{R}_{\geq 0}) \subseteq V_\alpha$.

Daraus folgen (1) und (2).

Da V_α kompakt ist, folgt aus dem Satz, $\emptyset \neq L^+(v) \subseteq V_\alpha$ für alle $v \in V_\alpha$.

<u>Beh:</u> $X(f)(v^+) = 0$ für alle $v^+ \in L^+(v)$

$\ulcorner$ Andernfalls wäre $X(f)(v^+) < 0$ für ein $v^+ \in L^+(v)$

Dann gibt es eine Kugel $\mathbb{B}_{2\varepsilon}(v^+) \subseteq \mathcal{U}$ und ein $\beta < 0$ mit

$$X(f)(u) < \beta \qquad \forall u \in \mathbb{B}_{2\varepsilon}(v^+)$$

Wegen $v^+ \in L^+(v)$ gibt es $t_k \longrightarrow \infty$ mit $\gamma_v(t_k) \longrightarrow v^+$. Durch Übergang zu einer Teilfolge der t_k erreichen wir:

Für ein festes $\delta > 0$ gilt:

$$|\gamma_v(t) - v^+| < \varepsilon \qquad \forall t \in \bigcup (t_k - \delta, t_k + \delta$$

$\ulcorner$ $|\gamma_v(t) - v^+| < \varepsilon'$ läßt sich klar erreichen.

Nun ist $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ aber beschränkt auf der kompakten Menge

V_α, die $\gamma(\mathbb{R}_{\geq 0})$ enthält. $\lrcorner$

<u>Also:</u> Auf jedem Intervall $(t_k - \delta, t_k + \delta)$

ist $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = X(f)(\gamma(t)) < \beta < 0$.

<u>Daher:</u> $f(\gamma(t))$ ist nicht von unten beschränkt.

Das steht im Widerspruch zu $\gamma(\mathbb{R}_{\geq 0}) \subseteq V_\alpha$

und der Kompaktheit von V_α. $\boxtimes$

Kor: $V \subseteq U$ offen

$f: V \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar

$\forall \alpha \in f(V): \quad V_\alpha := \{v \in V \mid f(v) \leq \alpha\}$: kompakt

$X(f) \leq 0$ auf ganz V

M sei die größte inv. Teilmenge

von $\quad N := \{v \in V \mid X(f)(v) = 0\}$

Dann gilt:

1) $M \neq \emptyset$

2) $V \subseteq \mathcal{E}(M)$

d.h.: $\forall v \in V: \ \operatorname{dist}(\gamma_v(t), M) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

Bew: Sei $v \in V$. Dann ist $v \in V_\alpha$ für $\alpha = f(v)$.

Da V_α kompakt ist, ist die Prop. anwendbar.

Es folgt:

(1) $X(f) \equiv 0$ auf $L^+(v)$, d.h.: $L^+(v) \subseteq N$.

(2) $\gamma_v(\mathbb{R}_{\geq 0}) \subseteq V_\alpha$: kompakt

Aus (2) folgt (siehe Satz):

(3) $L^+(v)$ ist inv.

<u>also</u>: (3'): $L^+(v) \subseteq M$: max. inv. Teilm. von $N \supseteq L^+(v)$

Schließlich:

Satz (!)

$$\operatorname{dist}(\gamma_v(t), M) \leq \operatorname{dist}(\gamma_v(t), L^+(v)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \qquad \blacksquare$$

Stabilitätssatz von LaSalle

$X: U \to \mathbb{R}^n$ lok. Lipschitzstetig, zeitunabh.

$X(0) = 0$

$f: U \to \mathbb{R}$ Lyapunovfunktion

Ist $M = \{0\}$ die größte inv. Teilmenge von $N := \{u \in U \mid \dot{f}(u) = 0\}$, so ist die Ruhelage $\gamma_0 \equiv 0$ asympt. stabil.

Bem: Als Korollar erhalten wir die bekannte Implikation

$$\dot{f} < 0 \text{ auf } U \setminus \{0\} \implies \gamma_0 \equiv 0 \text{ asymp. stabil}$$

Bew: Wähle $\epsilon, r > 0$ mit:

1) $\overline{\mathbb{B}_r}(0) \subseteq U$

2) $f(u) > \varepsilon \quad \forall\, u \in \partial \mathbb{B}_r(0)$

Setze: $V := \{ v \in \mathbb{B}_r(0) \mid f(v) < \varepsilon \} \ni 0$

$\leftarrow$ offen!

Beob: $\overline{V} = \{ v \in \mathbb{B}_r(0) \mid f(v) \leq \varepsilon \}$ schneidet $\partial \mathbb{B}_r(0)$ nicht. Wegen $\overline{V} \subseteq \overline{\mathbb{B}_\varepsilon(0)}$ folgt:

$$\overline{V} \subseteq \mathbb{B}_r(0)$$

Kor: $\overline{V}_\alpha$ ist für jedes α kompakt.

Beob: $0 \in V_\alpha$ wegen $f(0) = 0$ und $0 \in \mathbb{B}_r(0)$.

Nach Annahme ist $M = \{0\}$ größte inv. Teilmenge.

Also: $\operatorname{dist}(\gamma_v(t), M) = |\gamma_v(t) - 0| \longrightarrow 0$

für jedes $v \in V$

D.h.: $\gamma \equiv 0$ ist asympt. stabil. ☒