Ableitbarkeit des Flusses

$X : I \times U \to \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld

$D \subseteq I \times I \times U$ Def.bereich des Flusses.

$\Phi : D \to U$ globaler Fluß

Bem: $\Phi(t,\tau,u) = u + \int_\tau^t X_s(\Phi(s,\tau,u))\,ds$

Daher ist Φ als Funktion von t partiell differenzierbar:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\tau,u) = X_t(\Phi(t,\tau,u))$$

Wert an der Obergrenze des Integral

Frage: Unter welchen Voraussetzungen existieren die partiellen Ableitungen

$$D_2\Phi = \frac{\partial}{\partial \tau}\Phi(t,\tau,u)$$

$$D_3\Phi = \frac{\partial}{\partial u}\Phi(t,\tau,u)$$

und wie lassen sie sich g.g.f. ausrechnen?

<u>Idee:</u> Wir nehmen einmal an, Φ sei diff.bar. Dann können wir für $D_2\Phi$ und $D_3\Phi$ Anfangswertprobleme aufstellen. Ausgangspunkt ist

(1) $\quad D_1\Phi = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\tau,u) = X_t(\Phi(t,\tau,u))$

(2) $\quad u = \Phi(\tau,\tau,u)$

Wir schreiben das als Diagramme

(1)
$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "{(pr_1, \Phi)}"] \arrow[dr, "D_1\Phi"'] & I\times U \arrow[d, "X"] \arrow[dl, phantom, "\checkmark"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd} I\times U \arrow[r, "{(pr_1, pr_1, pr_2)}"] \arrow[dr, "pr_2"'] & D \arrow[d, "\Phi"] \arrow[dl, phantom, "\checkmark"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Auf (1) wenden wir die Kettenregel im Punkt (t, τ, u) an:

$$D_{(t,\tau,u)} D_1 \Phi = D_{(t, \Phi(t,\tau,u))} X \circ D_{(t,\tau,u)} (pr_1, \Phi)$$

Als Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ D_1\Phi & D_2\Phi & D_3\Phi \end{pmatrix}"] \arrow[dr, swap, "\begin{array}{c} (D_1D_1\Phi \;\; D_2D_1\Phi \;\; D_3D_1\Phi) \\ \parallel \text{ (Schwarz)} \\ (D_1D_1\Phi \;\; D_1D_2\Phi \;\; D_1D_3\Phi) \end{array}"] & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "(D_1X \;\; D_2X)"] \\
 & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

<u>Also</u> (als Blockmatrizen):

$$(D_1D_1\Phi \;\; D_1D_2\Phi \;\; D_1D_3\Phi) = (D_1X \;\; D_2X) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ D_1\Phi & D_2\Phi & D_3\Phi \end{pmatrix}$$

<u>D.h.</u>: $D_1D_1\Phi = D_1X + D_2X \circ D_1\Phi$

$D_1 D_2 \Phi = D_2 X \circ D_2 \Phi$

D_1 ist $\frac{d}{dt}$

$D_1 D_3 \Phi = D_2 X \circ D_3 \Phi$

Also: $\frac{d}{dt}\left(D_2\Phi \;\; D_3\Phi\right) = D_2X \cdot \left(D_2\Phi \;\; D_3\Phi\right)$

(Matrixmult.)

Bem: Das ist eine homogene, zeitabh. lin. DGL für die $n\times(1+n)$ Blockmatrix $(\underbrace{D_2\Phi}_{n\times 1} \;\; \underbrace{D_3\Phi}_{n\times n})$.

Nun wenden wir die Kettenregel bei (τ,τ,u) an auf

(2)
$$\begin{tikzcd}
I\times U \arrow[r, "{(pr_1,\, pr_1,\, pr_2)}"] \arrow[dr, "pr_2"'] & D \arrow[d, "\Phi"] \arrow[dl, phantom, "\checkmark"] \\
& U
\end{tikzcd}$$

und erhalten

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \arrow[r, "{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_n \end{pmatrix}}"] \arrow[dr, "{(0 \;\; \mathbb{1}_n)}"'] & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \arrow[d, "{(D_1\Phi \;\; D_2\Phi \;\; D_3\Phi)}"] \\
& \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Also: $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1\Phi & D_2\Phi & D_3\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_n \end{pmatrix}$

Daher:
$$\left.\begin{aligned} 0 &= D_1\Phi + D_2\Phi \\ \mathbb{1}_n &= D_3\Phi \cdot \mathbb{1}_n = D_3\Phi \end{aligned}\right| \text{ an der Stelle } t=\tau$$

D.h.:
$$\begin{pmatrix} D_2\Phi & D_3\Phi \end{pmatrix}\Big|_{(\tau,\tau,u)} = \begin{pmatrix} -D_1\Phi & \mathbb{1}_n \end{pmatrix}\Big|_{(\tau,\tau,u)}$$

Damit haben wir $\begin{pmatrix} D_2\Phi & D_3\Phi \end{pmatrix}(t,\tau,u)$ als Lösung eines AWP identifiziert:

Mit $A(t,\tau,u) := D_2 X\,(t, \Phi(t,\tau,u))$

ist:
$$\left|\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} D_2\Phi & D_3\Phi \end{pmatrix}(t,\tau,u) &= A(t,\tau,u)\begin{pmatrix} D_2\Phi & D_3\Phi \end{pmatrix}(t,\tau,u) \\ \begin{pmatrix} D_2\Phi & D_3\Phi \end{pmatrix}(\tau,\tau,u) &= \begin{pmatrix} -D_1\Phi & \mathbb{1}_n \end{pmatrix}(\tau,\tau,u) \end{aligned}\right|$$

Bem: Für festes (τ, u) ist also

$$\gamma : t \longmapsto \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(t, \tau, u) \in \mathbb{R}^n$$

Lösung des AWP

$$\left| \begin{array}{l} \dot{\gamma}(t) = D_2 X(t, \tau, u) \cdot \gamma(t) \\ \gamma(\tau) = -\frac{d}{dt} \Phi(\tau, \tau, u) \end{array} \right|$$

Ebenso ist

$$\eta : t \longmapsto \frac{\partial}{\partial u} \Phi(t, \tau, u) \in \mathbb{M}_{n \times n}$$

Lösung des AWP

Matrix mult.

$$\left| \begin{array}{l} \dot{\eta}(t) = D_2 X(t, \tau, u) \, \eta(t) \\ \eta(\tau) = \mathbb{1}_n \end{array} \right|$$

Satz: $X : I \times U \to \mathbb{R}^n$ sei ein stetiges VF.
Die partielle Ableitung $D_2 X$ nach dem Raum existiere und sei stetig als Funktion

$$D_2 X : I \times U \longrightarrow \mathbb{M}_{n\times n} = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$$

Dann ist der globale Fluß $\Phi : D \to U$ stetig diff. bar.
Die partiellen Ableitungen $D_2 \Phi$ und $D_3 \Phi$ lösen die AWPe

schon eingesehen

$$(A) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt} D_2 \Phi(t,\tau,u) = A(t,\tau,u)\, D_2\Phi(t,\tau,u) \\ D_2 \Phi(\tau,\tau,u) = -D_1 \Phi(\tau,\tau,u) \end{array} \right|$$

$$(B) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt} D_3 \Phi(t,\tau,u) = A(t,\tau,u)\, D_3\Phi(t,\tau,u) \\ D_3 \Phi(\tau,\tau,u) = \mathbb{1}_n \end{array} \right|$$

mit $A(t,\tau,u) = D_2 X(t, \Phi(t,\tau,u))$

Bew: Wir zeigen, daß die partiellen Ableitungen von Φ existieren und stetig sind.

$\boxed{D_3\Phi}$ **Setze**:

$$\Delta(t,\tau,u,h) := \Phi(t,\tau,u+h) - \Phi(t,\tau,u)$$

$$B(t,\tau,u,h) := \int_0^1 D_2 X(t, \Phi(t,\tau,u) + s\Delta(t,\tau,u,h))\, ds$$

Dann: $$\frac{d}{dt}\Delta = D_1 \Delta$$

$$= D_1 \Phi(t,\tau,u+h) - D_1\Phi(t,\tau,u)$$

$$= X_t(\Phi(t,\tau,u+h)) - X_t(\Phi(t,\tau,u))$$

$$= B(t,\tau,u,h) . \Delta(t,\tau,u,h)$$

$\ulcorner$ $h(a,b+c) - h(a,b) \quad \rightsquigarrow \quad g(t) := h(a, b+tc)$

$$\overset{"}{g(1) - g(0)} = \int_0^1 g'(s)\,ds$$

$$= \int_0^1 D_2 h(a, b+sc) . c \; ds$$

$$= \left(\int_0^1 D_2 h(a,b+sc)\, ds\right) . c$$ $\lrcorner$

Auch: $\Delta(\tau,\tau,u,h) = u+h-u = h$

Also: $\Delta(-,\tau,u,h) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$

löst das AWP

$$\left| \begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= B(t,\tau,u,h)\cdot \gamma(t) \\ \gamma(\tau) &= h \end{aligned} \right|$$

Sei $H : I \to \mathbb{M}_{n\times n}$ Lösung des AWP

$$\left| \begin{aligned} \dot{H}(t) &= B(t,\tau,u,h)\cdot H(t) \\ H(\tau) &= \mathbb{1}_n \end{aligned} \right|$$

Dann ist

$$\Delta(t,\tau,u,h) = \gamma(t) = H(t)\cdot h$$

Dabei hängt H stetig von den Parametern τ, u und h ab.

<u>Daher:</u>

$$\begin{aligned} &\| \Phi(t,\tau,u+h) - \Phi(t,\tau,u) - H(t,\tau,u,0)\cdot h \| \\ &= \| \Delta(t,\tau,u,h) - H(t,\tau,u,0)\cdot h \| \\ &= \| H(t,\tau,u,h)\cdot h - H(t,\tau,u,0)\cdot h \| \\ &\leq \underbrace{\| H(t,\tau,u,h) - H(t,\tau,u,0) \|_{op}}_{\xrightarrow{h\to 0}\ 0} \|h\| \end{aligned}$$

stetige Abhängigkeit von Parametern

$\underline{\text{Also}}$: $D_3 \Phi(t,\tau,u) = H(t,\tau,u,0)$

$\underline{\text{Und}}$: $D_3 \Phi : D \to \mathbb{M}_{n\times n}$ ist stetig.

$\boxed{D_2\Phi}$ Setze:

$$\Delta(t,\tau,\sigma,u) := \Phi(t,\tau+\sigma,u) - \Phi(t,\tau,u)$$

$$B(t,\tau,\sigma,u) := \int_0^1 D_2 X(t, \Phi(t,\tau,u) + s\Delta(t,\tau,\sigma,u))\, ds$$

$\underline{\text{Dann}}$: $\frac{d}{dt}\Delta = D_1\Delta = D_1\Phi(t,\tau+\sigma,u) - D_1\Phi(t,\tau,u)$

$$= X_t(\Phi(t,\tau+\sigma,u)) - X_t(\Phi(t,\tau,u))$$

$$= B(t,\tau,\sigma,u) \cdot \Delta(t,\tau,\sigma,u)$$

$\underline{\text{Ferner}}$: $\Delta(\tau,\tau,\sigma,u) = \Phi(\tau,\tau+\sigma,u) - u$

$$= \Phi(\tau,\tau+\sigma,u) - \Phi(\tau+\sigma,\tau+\sigma,u)$$

$$= -\sigma \int_0^1 D_1\Phi(\tau+h\sigma,\tau+h\sigma,u)\, dh$$

$$= -\sigma \int_0^1 X_{\tau+h\sigma}(\Phi(\tau+h\sigma,\tau+h\sigma,u))\, dh$$

$$= -\sigma X_\tau(u) + \sigma Y(\tau,\sigma,u)$$

mit $Y(\tau,\sigma,u) := \int_0^1 X_\tau(u) - X_{\tau+h\sigma}(\Phi(\tau+h\sigma,\tau+h\sigma,u))\,dh$

Also: $\Delta(-,\tau,\sigma,u) : I \to \mathbb{R}^n$ löst das AWP

$$\left|\begin{array}{l} \dot{\gamma}(t) = B(t,\tau,\sigma,u)\cdot\gamma(t) \\ \gamma(\tau) = -\sigma X_\tau(u) + \sigma Y(\tau,\sigma,u) \end{array}\right|$$

Wir betrachten wieder das FS $H : I \to M_{n\times n}$

$$\left|\begin{array}{l} \dot{H}(t) = B(t,\tau,\sigma,u)\cdot H(t) \\ H(\tau) = \mathbb{1}_n \end{array}\right|$$

und erhalten

H hängt implizit auch ab von τ, σ, u.

$$\Delta(t,\tau,\sigma,u) = \gamma(t) = H(t)\cdot\gamma(\tau)$$

$$= H(t)\cdot\sigma\left(-X_\tau(u) + Y(\tau,\sigma,u)\right)$$

Wir rechnen:

$$\underbrace{\Phi(t,\tau+\sigma,u) - \Phi(t,\tau,u)}_{=\Delta(t,\tau,\sigma,u)} + \sigma H(t,\tau,0,u)\cdot X_\tau(u)$$

$$= \sigma H(t,\tau,\sigma,u)\cdot\left(-X_\tau(u) + Y(\tau,\sigma,u)\right)$$

$$+ \sigma H(t,\tau,0,u)\cdot X_\tau(u)$$

$$= \sigma \underbrace{Y(\tau,\sigma,u)}_{\substack{\downarrow \sigma\to 0\\ 0}} + \sigma \underbrace{\left[H(t,\tau,0,u) - H(t,\tau,\sigma,u\right] X_\tau(u)}_{\substack{\downarrow \sigma\to 0\\ 0}}$$

stetige Abh.keit von Parametern!

$$= o(\sigma)$$

<u>Also</u>: $D_2\Phi(t,\tau,u) = H(t,\tau,0,u).(-X_\tau(u))$

$D_2\Phi : D \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.

$\boxed{D_1\Phi}$ klar: $D_1\Phi(t,\tau,u) = X_t(\Phi(t,\tau,u))$ $\square$