

Fakt: Sei $\Delta: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine stetige Kurve mit $\Delta \not\equiv 0$. Dann gibt es eine glatte Kurve $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit kompaktem Träger $\text{supp}(\eta) \subseteq (t_0, t_1)$, so daß

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \Delta(t) | \eta(t) \rangle dt > 0$$

ist.

Bew: Sei $\Delta \not\equiv 0$. Wähle $s \in (t_0, t_1)$ mit $h := \Delta(s) \neq 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\langle h | \Delta(t) \rangle > 0 \quad \forall t \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$$

Wir wählen $\eta(t) := b(t) h$, wobei

$$b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine glatte Beale mit Träger in $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ ist und $b(s) > 0$ gilt.



Wohin kommen DGLn?

Variationsrechnung / klassische Mechanik

$U \subseteq \mathbb{R}^d$, offen

$TU := U \times \mathbb{R}^d$ Tangentialbündel

$\lceil f: U \rightarrow V$ glatt

$Tf: TU \rightarrow TV$

Tangentialabb

$(u, h) \mapsto (f(u), D_u f \cdot h)$

$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$

$T(g \circ f) = Tg \circ Tf$

Kettenregel

$\rfloor$

$\mathcal{L}: U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow U$ glatter Weg

Def: Die Wirkung von $\mathcal{L}$ entlang γ ist:

$$A_\gamma(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt$$

Ein Variationsproblem ist gegeben

durch $\mathcal{L}$, zwei Punkte $u_0, u_1 \in U$

und zwei Zeiten $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$.

Gesucht ist $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow U$ mit

$$\gamma(t_0) = u_0 \quad \gamma(t_1) = u_1$$

so daß $A_{\mathcal{L}}(\gamma)$ minimal wird.

Bsp: $U = \mathbb{R}^2 \quad TU = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{L}(u, h, t) := \|h\| = \langle h|h \rangle^{\frac{1}{2}}$$

$$A_{\mathcal{L}}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \text{Länge von } \gamma$$

Das Variationsproblem ist also, die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten zu finden.

Idee: Sei $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow U$ ein Minimierer.

Betrachte eine kleine Störung:

Sei $\eta: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ glatt mit

$$\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$$

und $\delta > 0$ so klein, daß

$$\gamma + h\eta: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

Werte in U annimmt für alle $h \in (-\delta, \delta)$.

Dann ist $A_{\mathcal{L}}(\gamma + h\eta) \geq A_{\mathcal{L}}(\gamma)$, weil γ ein Wirkungsminimierer ist. Also:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dh} A(\gamma + h\eta) \right|_{h=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left. \frac{d}{dh} \mathcal{L}(\gamma(t) + h\eta(t), \dot{\gamma}(t) + h\dot{\eta}(t), t) \right|_{h=0} dt \end{aligned}$$

$$\boxed{v(t) := (\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} D_{v(t)}^1 \mathcal{L} \cdot \eta(t) + D_{v(t)}^2 \mathcal{L} \cdot \dot{\eta}(t) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} D_{v(t)}^1 \mathcal{L} \cdot \eta(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} D_{v(t)}^2 \mathcal{L} \cdot \dot{\eta}(t) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} D_{v(t)}^1 \mathcal{L} \cdot \eta(t) dt + \underbrace{\left[D_{v(t)}^2 \mathcal{L} \cdot \eta(t) \right]_{t_0}^{t_1}}_{=0 \mid \eta(t_0) = \eta(t_1) = 0} \quad \begin{array}{l} \text{part.} \\ \text{Int.} \end{array}$$

$$- \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} D_{v(t)}^2 \mathcal{L} \cdot \eta(t) dt$$

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left(D_{v(t)}^1 \mathcal{L} - \frac{d}{dt} D_{v(t)}^2 \mathcal{L} \right) \cdot \eta(t) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle D_{v(t)}^1 \mathcal{L} - \frac{d}{dt} D_{v(t)}^2 \mathcal{L} \mid \eta(t) \right\rangle dt''$$

Fakt $\Rightarrow$

$$D_{v(t)}^1 \mathcal{L} - \frac{d}{dt} D_{v(t)}^2 \mathcal{L} \equiv 0 \quad \text{auf } [t_0, t_1]$$

Also / Prop: Ist γ ein Wirkungsminimierer,
so erfüllt γ die Euler-Lagrangsche DGL

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)$$

$$\mathcal{L}_u = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_h$$

$$\begin{aligned} u &= \gamma(t) \\ h &= \dot{\gamma}(t) \end{aligned}$$

Bsp: $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, t\right) := \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$
 $u \quad h \quad = \|h\| = \langle h|h \rangle^{\frac{1}{2}}$

$$\mathcal{L}_u = (\mathcal{L}_x \quad \mathcal{L}_y) = (0 \quad 0)$$

$$\mathcal{L}_h = (\mathcal{L}_{\Delta x} \quad \mathcal{L}_{\Delta y}) = \left(-\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \quad -\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)$$

$$= -\frac{1}{\|h\|} h^T$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Also: $\mathcal{L}_h(t) = \frac{-1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \dot{\gamma}(t)^T$

$$= -\langle \dot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle^{-\frac{1}{2}} \dot{\gamma}(t)^T$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_h(t) =$$

$$\cancel{\frac{1}{2} \langle \dot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle^{-\frac{3}{2}}} \cancel{2 \langle \dot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle} \dot{\gamma}(t)^T$$

$$= -\langle \dot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle^{-\frac{1}{2}} \ddot{\gamma}(t)^T$$

E-L-DGL :

$$0 = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_h(t)$$

$$\Leftrightarrow \langle \ddot{\gamma}(t) | \ddot{\gamma}(t) \rangle^{-\frac{3}{2}} \langle \ddot{\gamma}(t) | \ddot{\gamma}(t) \rangle \ddot{\gamma}(t)^\tau = \\ = \langle \ddot{\gamma}(t) | \ddot{\gamma}(t) \rangle^{-\frac{1}{2}} \ddot{\gamma}(t)^\tau$$

$$\Leftrightarrow \langle \ddot{\gamma}(t) | \ddot{\gamma}(t) \rangle \ddot{\gamma}(t)^\tau = \langle \ddot{\gamma}(t) | \ddot{\gamma}(t) \rangle \ddot{\gamma}(t)^\tau$$

Offensichtliche Lösungen

$$\ddot{\gamma} \equiv 0 \quad \text{d.h.} \quad \ddot{\gamma} : \text{konstant.}$$

Die offensichtlichen Lösungen geben eine Lösung für jedes AWP. Eindeutigkeit der Lösungen für AWPc zeigt: die offensichtlichen Lösungen sind alle.

D.h.: Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist eine Gerade.

Beob: Ist $\mathcal{L}$ zeitunabhängig und ist γ ein Wirkungsminimierer, so ist

$$\mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \mathcal{L}_h(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t)$$

konstant.

Bew:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \mathcal{L}_h(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t) \right] \\ &= \mathcal{L}_u(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t) + \cancel{\mathcal{L}_h(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \ddot{\gamma}(t)} \\ & \quad - \cancel{\mathcal{L}_h(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \ddot{\gamma}(t)} - \left(\frac{d}{dt} \mathcal{L}_h(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) \dot{\gamma}(t) \\ &= \left[\mathcal{L}_u(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_h(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right] \dot{\gamma}(t) \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=0} \end{aligned}$$

◻

Mechanik (nach Lagrange)

$$V \subseteq \mathbb{R}^d \quad \text{Ortsraum}$$

$$V \times \mathbb{R}^d = TU \quad \text{Zustandsraum}$$

$$T: V \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{kinetische Energie}$$

$$U: V \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{potentielle Energie}$$

$$\mathcal{L} := T - U$$

Dann: Die Entwicklung des Systems genügt
der Euler-Lagrange-DGL

$$\mathcal{L}_v = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\dot{v}}$$

Bem: Die kinetische Energie ist für
gewöhnlich eine quadratische Form abh.
von dem Geschwindigkeitsvektor:

$$T(v, \dot{v}, t) = \langle \dot{v} | \dot{v} \rangle_M$$

wobei $\langle - | - \rangle_M: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ein inneres
Prod. ist, das die Masseverteilung beschreibt.

z.B. $T(-, \begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \vdots \\ \dot{v}_d \end{pmatrix}, -) = \sum \frac{m_i}{2} \dot{v}_i^2$

Die potentielle Energie ist für gewöhnlich unabh. von dem Geschw.vektor.

Beob: Ist $T = T(\dot{v}) = \langle \dot{v} | \dot{v} \rangle_M$ unabh. von t und v und ist $U = U(v)$ unabh. von v und t , so ist $H := T + U$ konstant. $T = \sum \frac{m_i}{2} \dot{v}_i^2$

Bew: $\mathcal{L} = T - U = T(\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_d) - U(v_1, \dots, v_d)$

$$\mathcal{L}_v = -U_v \quad \mathcal{L}_{\dot{v}} = T_{\dot{v}} = \sum m_i \dot{v}_i$$

E-L-DGL: $-U_v = \frac{d}{dt} T_{\dot{v}} \quad \boxed{-U_{v_i} = m_i \ddot{v}_i}$

Dann:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H &= \frac{d}{dt} \sum \frac{m_i}{2} \dot{v}_i^2 + \frac{d}{dt} U(v) \\ &= \sum m_i \dot{v}_i \ddot{v}_i + \sum U_{v_i} \dot{v}_i \\ &= \sum \dot{v}_i \underbrace{[m_i \ddot{v}_i + U_{v_i}]}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Energieerhaltung

