Aufgabe 1. Diskutiere die Gleichung

$$y' = x^2 + x^2y^2.$$

Lösung: Man kann die gegebene Differentialgleichung in der folgenden Form

$$y' = x^2(1 + y^2)$$

schreiben. Nun kann man die Gleichung

$$\frac{y'}{1 + y^2} = x^2$$

erhalten. Durch die einfache Anwendung der Integration für beide Seiten erhalten wir die Gleichung

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

mit der Integrationskonstante C. Für die Integration der linken Seite nimmt man die Substitution $y = \tan\theta$ vor, so dass wir die Integration

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{1}{1 + \tan^2\theta} \sec^2\theta \, d\theta = \int d\theta.$$

erhalten. Daraus ergibt sich

$$\int d\theta = \arctan y = \frac{1}{3}x^3 + C$$

und letztlich ist die Lösung der Differentialgleichung in der Form

$$y = \tan(\frac{1}{3}x^3 + C),$$

mit der Konstante $C \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 2. Diskutiere die Differentialgleichungen

$$y' = xy, \; y = y'x, \; yy' = x.$$

Lösung: Zuerst beachten wir die Gleichung $y' = xy$. Division beider Seiten durch y erhalten wir die Gleiching in der folgenden Form

$$\frac{y'}{y} = x.$$

Dann können wir durch die unbestimmten Integrale

$$\log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

mit der Integrationskonstante C erhalten. Daher ist die Lösung der Gleichung in der Form

$$|y| = ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

wobei $c = e^C$.

Jetzt beachten wir die Gleichung $y = y'x$. Division beider Seiten durch xy kann man die Gleichung in der Form

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}.$$

Dann die unbestimmten Integrale führt auf die Gleichung

$$\log|y| = \log|x| + C$$

mit der Integrationskonstante C. Dann erhalten wir die Lösung in der Form

$$|y| = c|x|$$

wobei $c = e^C$.

Hier beachten wir nur die dritte Gleichung $yy' = x$. Zuerst erkennt man, dass man die linke Seite yy' auch in einer anderen Form $yy' = \frac{1}{2}(y^2)'$ schreiben kann. Dann kann man durch die unbestimmten Integrale

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

mit der Integrationskonstante C erhalten. Daher lautet die Lösung der Differentialgleichung in der Form

$$y = \pm\sqrt{x^2 + C}.$$

* Man muss erkennen, dass die Lösungen oben noch nicht bestimmt sind. Das bedeutet, dass man noch nicht bescheiden kann ob $|y|$ in der Lösung $+y$ oder $-y$ ist. Dafür braucht man noch eine Anfangsbedingung. □

Aufgabe 3. Finde eine Diffrentialgleichung, deren Lösungen gerade die Funktionen $y_a : x \mapsto a(1 + x^2)$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ sind.

Lösung:

$$y' = \frac{2x}{1 + x^2}y, \ y(0) = a.$$

□