Aufgabe 1. Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

$$y' = -x/y,\ y(-3) = 4$$

und

$$y' = xy,\ y(3) = -4.$$

Lösung: Für das erste Anfangswertproblem kann man die Lösung

$$y = \pm\sqrt{C - x^2}$$

durch die unbestimmten Integrale erhalten. Die Anfangsbedingung $y(-3) = 4$ führt auf die Gleichung

$$4 = \pm\sqrt{C - 9},$$

mit der Lösung $C = 25$ und durch die Anfangsbedingung erhalten wir die Lösung $y = \sqrt{C - x^2}$.

Für das zweite Anfangswertproblem kann man die Gleichung in der Form

$$\frac{y'}{y} = x$$

schreiben. Durch die unbestimmten Integrale für die beide Seiten erhalten wir

$$\log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Nun erhalten wir

$$|y| = ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

oder können wir auch

$$y = \pm ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

schreiben wobei $c = e^C$. Die Anfangsbedingung $y(3) = -4$ führt auf die Gleichung

$$4 = ce^{9/2}$$

und daher lautet die Lösung

$$y = -4e^{\frac{1}{2}(x^2-9)}.$$

□

Aufgabe 2. Finde allgemeine Lösungen zu den folgenden Differentialgleichungen:

$$xyy' = y^2 - x^2$$

und

$$\sin x = y' + (\sin x)y.$$

Lösung: Für die erste Gleichung kann man nach der Berechnung die Gleichung in der Form

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

erhalten. Jetzt nehmen wir die Substitution $u = \frac{y}{x}$ vor, damit man die Differentialgleichung

$$u + xu' = u - \frac{1}{u}$$

erhält und die Gleichung

$$uu' = -\frac{1}{x}$$

sehen kann. Da uu' gleich $\frac{1}{2}(u^2)'$ ist, kann man durch die unbestimmten Integrale

$$\frac{1}{2}u^2 = -\log x + C = \log \frac{c}{x}$$

erhalten, wobei $c = e^C$.

Für die zweite Gleichung kann man auch in folgender Form

$$y' = \sin x(1 - y)$$

und nun erhalten wir auch die Gleichung

$$\frac{y'}{1-y} = \sin x.$$

Dann erhalten wir durch die unbestimmten Integrale

$$-\log|1 - y| = -\cos x.$$

Dann

$$|1 - y| = ce^{\cos x}$$

□

Aufgabe 3. If line integral of an 1-form ω on every closed curve is zero, then the 1-form ω is closed.

Lösung: [Sketch] In fact, we can prove even stronger; ω is exact. We consider the closed rectangle whose vertices are $(x_0, y_0), (x_0 + \Delta x, y_0), (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), (x_0, y_0 + \Delta y)$. We write

$$\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy.$$

Then the line integral along the rectangle can be written as

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x, y) - f(x, y_0 + \Delta y)\, dx + \int_{y_0}^{y_0+\Delta y_0} g(x_0 + \Delta x, y) - g(x_0, y)\, dy = 0. \tag{1}$$

As $\Delta x, \Delta y$ tend to 0, we obtain from the line integral above that

$$-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

□

Aufgabe 4. Löse für $a, b > 0$ das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y'' &= -a - by', \\ y'(0) &= 1, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Lösung: Multiplikation beider Seiten mit y' führt auf die Differentialgleichung

$$y'y'' = -ay' - b(y')^2.$$

Wir beobachten $y'y'' = \frac{1}{2}(y')^2$, nun können wir durch die Substitution $y' = u$ in folgender Form

$$\frac{1}{2}(u^2)' = -au - bu^2.$$

Wir nehmen noch die Substitution $u^2 = v$ vor und wir erhalten das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v' &= -av^{\frac{1}{2}} - bv, \\ v(0) &= 1. \end{aligned}$$

Dann nehmen wir die Substitution $v^{\frac{1}{2}} = z$ vor und erhalten wir endlich das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} z' &= -a - bz, \\ z(0) &= 1. \end{aligned}$$

Wir wenden die Methode der Variation der Konstante an. Das bedeutet, dass wir die Lösing in der Form $f(t) = c(t)e^{F(t)}$, wobei $F(t) = \int(-b)\,dt$ suchen wollten. Nun setzen wir den Ausdruck für $f(t) = c(t)e^{-bt}$ in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$c'(t)e^{-bt} - bc(t)e^{-bt} = -a - bc(t)e^{-bt},$$

und dann erhalten wir die Gleichung

$$c'(t)e^{-bt} = -a.$$

Die Lösung der Funktion $c(t)$ ist $-ae^{bt} + C$, mit Integrationskonstante C. Die Lösing z der Gleichung ist nun

$$z(t) = Ce^{-bt} - a,$$

und die Anfangsbedingung führt auf $C = a + 1$. Endlich erhalten wir

$$e^{-bt} - a(1 - e^{-bt}) = y'(t)$$

und erhalten die Lösing

$$-\frac{1}{b}e^{-bt} - at - \frac{a}{b}e^{-bt} + C = y(t)$$

mit der Integrationskonstante C. Die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ führt auf die Gleichung

$$-\frac{1}{b} - \frac{a}{b} + C = 0$$

und dann $C = \frac{a+1}{b}$ und die Lösung ist

$$y(t) = \frac{a+1}{b}(1 - e^{-bt}) - at.$$

$\square$