Aufgabe 1. Finde die Lösungen die Differentialgleichung $y''y' = x$, die bei $x = 0$ ein Maximum haben.

Lösung: Wir nehmen die Substitution $y' = u$ vor und erhalten die Gleichung $u'u = x$. Da $uu' = \frac{1}{2}(u^2)'$ ist, erhalten wir durch die umbestimmten Integrale

$$\frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Da die Lösungen y bei $x = 0$ ein Maximum haben und sie differenzierbar bei $x = 0$ sind, musst die Integrationskonstante C gleich null sein. Dann erhalten wir die Lösungen $y' = x$ oder $y' = -x$, die bedeutet, dass wir die Lösungen $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ oder $y = -\frac{1}{2}x^2 + C$ erhalten. Hier die Funktionen $y = -\frac{1}{2}x^2 + C$ sind die Lösungen, die bei $x = 0$ ein Maximum und eindeutigen Maximum haben. □

Aufgabe 2. Schreibe die folgenden Differentialgleichungen um als Vektorfelder.

1. $y' + xy = 0$
2. $y'' + y' + y + x = 0$
3. $y''y'yx = 1$
4. $y''' = y$

Lösung:

1. The vector field $X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is given by $X_t(y) = -ty$.
2. $X : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $X_t(y, y') = (y', -t - y - y')$.
3. $X : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $X_t(y, y') = (y', \frac{1}{tyy'})$.
4. $X : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X_t(y, y', y'') = (y', y'', y)$.

□

Aufgabe 3. Betrachte das stetige zeitunabhängige Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto 2\sqrt{|x|}. \end{aligned}$$

Es korrespondiert der Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y|}.$$

Zeig, dass $t \mapsto 0$ und

$$t \mapsto \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t^2, & t > 0 \end{cases}$$

Integralkurven sind. Find alle stetigen Integralkurven, die zum Zeitpunkt $t = 0$ den Punkt $x = 0$ durchlaufen. Zwei stehen schon da, also legt dieser Nulldurchgang die Integralkurve nicht eindeutig fest. Was sagt das über das folgende Anfangswertproblem?:

$$y' = 2\sqrt{|y|},$$
$$y(0) = 0$$

Lösung: Recall the statement of the Picard-Lindelöf theorem, which says:
Picard-Lindelöf theorem: Let $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $(d \geq 1)$ be a closed rectangle whose interior contains a point (t_0, y_0). Let $f : D \to \mathbb{R}^d$ be a function which is continuous in t and Lipschitz continuous in y. Then there exists $\epsilon > 0$ such that the initial value problem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

has a unique solution $y(t)$ on the interval $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$.
Now we consider the above differential equation $y' = 2\sqrt{|y|}$. Note that the Picard-Lindelöf theorem cannot be applied in this case, since the function $f(t, y) = 2y^{\frac{1}{2}}$ is not Lipschitz continuous in y. □

Aufgabe 4. Sei $X : I \times U \to E$ ein 15-mal stetig differenzierbares Vektorfeld und $\gamma : J \to U$ eine stetige Integralkurve von X. Zeige, dass γ 16-mal stetig differenzierbar ist.

Lösung: Since the vector field X is continuous, the derivative $\dot{\gamma}$ of γ is continuous due to the identity $\dot{\gamma} = X(\gamma)$. Then γ is of two times continuously differentiable. Since X is continuously differentiable, $\dot{\gamma}$ is continuously differentiable and hence γ is three times continuously differentiable. In this process, we obtain that γ is 16-times continuously differentiable. □