Aufgabe 1. Sei (Y, d) ein metrischer Raum. Zwei Folgen (x_i) und (y_j) in Y heissen kokonvergent, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein Schwellindex N existiert, so dass für alle $m, n > N$ gilt: $d(x_m, y_n) < \epsilon$. Zeige, dass Kokonvergenz eine symmetrische und transitive Relation ist.

Lösung: Suppose that two sequences (x_i) and (y_j) in Y are co-convergent. Given $\epsilon > 0$, there exists N so that if $m, n > N$ then $d(x_m, y_n) < \epsilon$. Since d is the metric in Y we have $d(x_m, y_n) = d(y_n, x_m)$ and we still have $m, n > N$ and hence $d(y_m, x_n) < \epsilon$. Now we let (x_i) and (y_j) be co-convergent, also (y_j) and (z_j) are co-convergent. Given $\epsilon > 0$, there exists $N, M > 0$ such that if $m, n > N$ then $d(x_m, y_n) < \epsilon$, and if $m, n > M$ then $d(y_m, z_n) < \epsilon$. Then we put $N' = \max\{N, M\}$. If $m, n, \ell > N'$, then

$$d(x_m, z_\ell) \le d(x_m, y_n) + d(y_n, z_\ell) < 2\epsilon.$$

□

Aufgabe 2. Sei (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum. Zeig, dass zwei Folgen $\{x_i\}$ und $\{y_i\}$ in Y genau dann kokonvergent sind, wenn beide kokonvergieren und überdies denselben Grenzwert haben.

Lösung: Sei $\{x_i\}$ und $\{y_i\}$ zwei kokonvergente Folge in den vollständige metrischer Raum (Y, d). Wir zeigen zuerst, dass die Folgen $\{x_i\}$ und $\{y_i\}$ Cauchyfolgen sind. Zu jedem $\epsilon > 0$, ein Schwellindex N existiert, so dass für alle $m, n > N$ gilt: $d(x_m, y_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann beobachten wir, dass

$$d(x_n, x_m) \le d(x_n, y_{N+1}) + d(y_{N+1}, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

wenn $m, n > N$. Daraus ergibt sich, dass die Folgen $\{x_i\}$ und $\{y_i\}$ Cauchyfolgen sind. Da der metrischer Raum (Y, d) vollständig ist, haben die Folgen $\{x_i\}$ und $\{y_i\}$ Grenzwerte: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} d(x, y) &\le d(x, x_{N+1}) + d(x_{N+1}, y) \\ &\le d(x, x_{N+1}) + d(x_{N+1}, y_{N+1}) + d(y_{N+1}, y) < \epsilon. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass zu jedem $\epsilon > 0$ die Umgleichung $d(x, y) < \epsilon$ gilt. Das bedeutet $x = y$. □

Aufgabe 3. Sei E ein Banachraum endlicher Dimension und U offen in E. Zeige, dass jedes stetige Vektorfeld $X : I \times U \to E$ lokal beschränkt ist.

Lösung: We need to show that the vector field X is bounded on an open ball $B_t(u)$, $(t, u) \in I \times U$. Given $u \in U$, we can always choose an open ball in U so that $B_t(u) \subset U$. Then the closure of the open ball $B_t(u)$ is compact and X is bounded on the closure, since X is continuous. □

Aufgabe 4. Berechne die Funktion:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(tx)\, dx.$$

Stelle dazu eine Differentialgleichung für f auf und löse das Anfangswertproblem zu $t = 0$. Die Identität $f(0) = \sqrt{\pi}$ darf vorausgesetzt werden.

Lösung: Wir beobachten durch der Differenzierung und der Integration in Teilstücken, dass

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x \sin(tx)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)' \sin(tx)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-x^2}\sin(tx)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-x^2} t\cos(tx)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-x^2} t\cos(tx)\,dx. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir die Differentialgleichung $f'(t) = \frac{1}{2}tf(t)$, und die Lösung ist

$$\log f(t) = \frac{1}{4}t^2 + C,$$

wobei $\sqrt{\pi} = e^C$ wegen die Anfangsbedingung. Dann die Lösing f ist

$$f(t) = \sqrt{\pi}e^{\frac{1}{4}t^2}.$$

□