Sei $A : I \to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine stetige Abbildung von einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ in den Raum der reellen $n \times n$-Matrizen. Betrachte das lineare Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : I \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto A(t)x. \end{aligned}$$

Betrachte ferner das lineare Vektorfeld

$$\begin{aligned} Y : I \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ (t, B) &\mapsto A(t)B. \end{aligned}$$

**Aufgabe 1.** Sei $U(\cdot, \tau) : I \to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ die $Y$-Integralkurve, die zur Zeit $\tau$ durch die Einheitsmatrix läuft: $U(\tau, \tau) = 1_n$. Zeige, dass $t \mapsto U(t, \tau)x$ eine $X$-Integralkurve ist, die zur Zeit $\tau$ durch den Punkt $x$ läuft.

*Lösung:* Let $t \mapsto U(t, \tau)$ be the integral curve for the vector field $Y$. Then we have the identity:

$$\frac{d}{dt}U(t, \tau) = A(t).$$

Hence the curve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ given by $\gamma(t) = U(t, \tau)x$ satisfies the identity

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}U(t, \tau)x = A(t)x,$$

which shows that the curve is truly the integral curve for the vector field $X$. □

**Aufgabe 2.** Die Abbildung $U : I \times I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sei definiert in der letzen Aufgabe: $U(\cdot, \tau)$ ist die $Y$-Integralkurve, die zur Zeit $\tau$ durch die Einheitsmatrix geht. Zeige, dass $U$ eine stetige Abbildung ist und der Bedingung

$$U(t_1, t_3) = U(t_1, t_2)U(t_2, t_3)$$

genügt. Zeige ferner, dass $U(t, \tau)$ stets invertierbar ist.

*Lösung:*

□

**Aufgabe 3.** Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann definieren wir die Operatornorm auf $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ durch:

$$\|A\|_{\text{op}} := \inf\{C > 0 : \|Av\| \leq C\|v\| \text{ für alle } v\}.$$

Zeige, dass die Operatornorm tatsächliche eine Norm ist, dass sie submultiplikativ ist und dass sie mit der auf $\mathbb{R}^n$ gegebenen Norm $\|\cdot\|$ verträglich ist.

*Lösung:* Let $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. By the definition,

$$\|AB\|_{\mathrm{op}} = \inf\{C > 0 : \|ABv\| \leq C\|v\|, \text{ for all } v\}.$$

Now for each $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\|ABv\| \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|Bv\| \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}\|v\|,$$

and hence $\|AB\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}$, which shows the sub-multiplicative property. □

**Aufgabe 4.** Sei $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine reele $n \times n$-Matrix. Definiere die Exponentialfunktion für Matrizen durch dei Reihe

$$\exp(A) := \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

Zeige, dass die Reihe konvergiert. Zeige ferner, dass für kommutierende Matrizen $A$ und $B$ gilt:

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B),$$

und bestimme die Ableitung der Funktion $t \mapsto \exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$. Berechne die Matrix

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

*Lösung:* For any matrix $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, the operator norm $\|A\|$ is bounded, i.e., $\|A\| \leq C$. Hence we see that the operator norm of $\exp(A)$ is bounded by:

$$\|\exp(A)\| \leq \left\|\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k\geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \sum_{k\geq 0} \frac{C^k}{k!} = e^C < \infty,$$

which shows that the exponential of any matrix is well-defined function.
Now suppose that two matrices $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ commute, i.e., $AB = BA$. Then for any $k \in \mathbb{N}$, we have $(A + B)^k = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} A^l B^{k-l}$. Then we see that

$$\begin{aligned}
\exp(A)\exp(B) &= \left(\sum_{l\geq 0} \frac{1}{l!} A^l\right)\left(\sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} B^m\right) \\
&= \sum_{k\geq 0} \sum_{l+m=k} \frac{(l+m)!}{l!m!} A^l B^m \\
&= \sum_{k\geq 0} \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} A^l B^{k-l} \\
&= \exp(A + B).
\end{aligned}$$

To compute the matrix

$$\exp\left(\begin{bmatrix}1 & 2t\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right),$$

we first note that

$$\begin{bmatrix}1 & 2t\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 2t\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

and two matrices on the right handside commute. Further an easy computation shows that

$$\begin{bmatrix}0 & 2t\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}0 & 2t\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2t\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

and hence

$$\begin{aligned}
\exp\left(\begin{bmatrix}1 & 2t\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) &= \exp\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\exp\left(\begin{bmatrix}0 & 2t\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\\
&= \left(\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\left(\sum_{j\geq 0}\frac{1}{j!}\begin{bmatrix}0 & 2t\\ 0 & 0\end{bmatrix}^j\right)\\
&= \begin{bmatrix}e & 0\\ 0 & e\end{bmatrix}\left(\frac{1}{0!}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix}0 & 2t\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\\
&= e\begin{bmatrix}1 & 2t\\ 0 & 1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$\square$