

Differentialgleichungen

Übungszettel 02

Abgabe: **Donnerstag, 25.4.**, 12:00 Uhr

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

$$\left\| \begin{array}{l} y' = -x/y \\ 4 = y(-3) \end{array} \right\| \quad \left\| \begin{array}{l} y' = xy \\ -4 = y(3) \end{array} \right\|$$

Aufgabe 2. Finde allgemeine Lösungen zu den folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} xyy' &= y^2 - x^2 \\ \sin(x) &= y' + \sin(x)y \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Zeige oder widerlege: Eine 1-Form ω ist geschlossen, wenn das Wegintegral von ω über jeden geschlossenen Weg verschwindet.

Aufgabe 4. Auf einen senkrecht nach oben geworfenen Ball wirkt die Erdbeschleunigung. Sie ist unabhängig von Höhe und Geschwindigkeit. Der Luftwiderstand ist für kleine Geschwindigkeiten proportional zur Geschwindigkeit (mit einer Proportionalitätskonstante, die vom Ball abhängt). Sei $y(t)$ die Höhe zur Zeit t . Dann erhalten wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = -a - by'$$

Beobachte, daß dies eigentlich eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Unbekannten y' ist. Löse für $a, b > 0$ das Anfangswertproblem:

$$\left\| \begin{array}{l} y'' = -a - by' \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{array} \right\|$$

Aufgabe 5. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -y$$

hat die offensichtlichen Lösungen

$$y(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$$

zu Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zeige, daß jede Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ Einschränkung einer dieser offensichtlichen Lösungen auf das Intervall I ist.