

Differentialgleichungen

Übungszettel 03

Abgabe: **Donnerstag, 02.05.**, 12:00 Uhr

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Finde die Lösungen der Differentialgleichung $y''y' = x$, die bei $x = 0$ ein Maximum haben.

Aufgabe 2. Schreibe die folgenden Differentialgleichungen um als Vektorfelder.

1. $y' + xy = 0$

2. $y'' + y' + y + x = 0$

3. $y''y'yx = 1$

4. $y''' = y$

Aufgabe 3. Betrachte das stetige zeitunabhängige Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2\sqrt{|x|} \end{aligned}$$

Es korrespondiert der Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y|}$$

Zeige, daß

$$t \mapsto 0$$

und

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t^2 & t > 0 \end{cases}$$

Integralkurven sind. Finde alle stetigen Integralkurven, die zum Zeitpunkt $t = 0$ den Punkt $x = 0$ durchlaufen. Zwei stehen schon da, also legt dieser Nulldurchgang die Integralkurve nicht eindeutig fest. Was sagt das über das folgende Anfangswertproblem:

$$\left\| \begin{array}{l} y' = 2\sqrt{|y|} \\ 0 = y(0) \end{array} \right\|$$

Aufgabe 4. Sei $X : I \times U \rightarrow E$ ein 15-mal stetig differenzierbares Vektorfeld und $\gamma : J \rightarrow U$ eine stetige Integralkurve von X . Zeige, daß γ 16-mal stetig differenzierbar ist.