Differentialgleichungen

Übungszettel 04

Abgabe: **Donnerstag, 9.05.**, 12:00 Uhr

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Sei E ein vollständiger normierter Raum. Wer mag (oder Banachräume nicht kennt), darf $E = \mathbb{R}^n$ annehmen. Zeige, daß jede differenzierbare Abbildung

$$f : I \times U \to E$$

lokal uniform Lipschitz-stetig im Raum ist, d.h.: Für jedes Paar $(t_0, u_0) \in I \times U$ gibt es $\delta, \varepsilon, L > 0$, so daß

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\| \quad \text{für alle } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \text{ und alle } u, v \in \mathbb{B}_\varepsilon(u_0)$$

gilt.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und Y ein metrischer Raum. Sei $f_i : X \to Y$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir sagen, daß die Folge (f_i) gleichmäßig gegen die Funktion $g : X \to Y$ konvergiert, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Schwellindex N existiert, so daß gilt:

$$\operatorname{dist}_Y(f_i(x)\,, g(x)) < \varepsilon \quad \text{für alle } i \geq N \text{ und alle } x \in X$$

Zeige, daß der gleichmäßige Limes einer Folge stetiger Funktionen stetig ist. (Wer topologische Räume nicht kennt, darf annehmen, daß X ein metrischer Raum ist.)

Aufgabe 3. In der Vorlesung habe ich den Satz von Picard-Lidelöf unter der Voraussetzung formuliert, daß das stetige Vektorfeld $X : I \times U \to E$ uniform Lipschitz-stetig im Raum ist. Auch die lokale Eindeutigkeit von Intergralkurven wurde unter dieser Annahme gezeigt.

Zeige, daß beide Aussagen auch unter der schwächeren Annahme gelten, daß X *lokal* uniform Lipschitz-stetig im Raum ist.

Aufgabe 4. Sei $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein stetiges zeitabhänngiges Vektorfeld, für das gilt:

$$X_t(x) < 0 \text{ falls } tx > 0 \qquad \text{und} \qquad X_t(x) > 0 \text{ falls } tx < 0$$

Zeige, daß die Kurve $\gamma : t \mapsto 0$ die einzige Integralkurve mit $\gamma(0) = 0$ ist.