Differentialgleichungen

Übungszettel 05

Abgabe: **Donnerstag, 16.05.**, 12:00 Uhr

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Sei (Y, d) ein metrischer Raum. Zwei Folgen (x_i) und (y_j) in Y heißen kokonvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Schwellindex N existiert, so daß für alle $m, n > N$ gilt: $d(x_m, y_n) < \varepsilon$. Beobachte, daß eine Folge zu sich selbst genau dann kokonvergent ist, wenn sie eine Cauchyfolge ist. Eine Folge ist kokopnvergent zur konstanten Folge $y, y, y, y, \ldots$ genau dann, wenn sie gegen y konvergiert.

Zeige, daß Kokonvergenz eine symmetrische und transitive Relation ist.

Sei überdies (Y, d) vollständig. Zeige, daß zwei Folgen (x_i) und (y_j) genau dann kokonvergent sind, wenn beide konvergieren und überdies denselben Grenzwert haben.

Aufgabe 2. Sei (Y, d) ein *vollständiger* metrischer Raum.

Zeige, daß zwei Folgen (x_i) und (y_j) in Y genau dann kokonvergent sind, wenn beide konvergieren und überdies denselben Grenzwert haben.

Aufgabe 3. Sei E ein Banachraum *endlicher Dimension* und U offen in E. (Wer mit unnötiger Allgemeinheit auf Kriegsfuß steht, mag $E = \mathbb{R}^n$ mit der gewöhnlichen Norm annehmen.)

Zeige, daß jedes stetige Vektorfeld $X : I \times U \to E$ lokal beschränkt ist.

Aufgabe 4. Berechne die Funktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}\, x \end{aligned}$$

Stelle dazu eine Differentialgleichung für f auf und löse das Anfangswertproblem zu $t = 0$. Die Identität

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}\, x = \sqrt{\pi}$$

darf vorausgesetzt werden.