# Differentialgleichungen

Übungszettel 06

Abgabe: **Donnerstag, 23.05.**, 12:00 Uhr

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

**Aufgabe 1.** Sei $X : \mathbb{R} \times E \to E$ ein stetiges Vektorfeld und zusätzlich uniform Lipschitz-stetig im Raum, also nicht bloß lokal uniform Lipschitz-stetig im Raum. Zeige, daß maximale Integralkurven in $X$ stets auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

Hint: Wäre eine maximale Integralkurve nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, würde sie in endlicher Zeit ins Unendliche laufen (in positiver oder in negativer Zeitrichtung). Meditiere über das Lemma von Gronwald.

**Aufgabe 2.** Sei $U \subseteq E$ offen in einem Banachraum. Zeige, daß jeder Punkt $x \in U$ positiven Abstand vom Rand $\partial(U)$ hat.

Sei $V \subseteq E$ eine beliebige (!) Teilmenge mit nicht-leerem Rand und $x \in V$ ein Punkt, der zum Rand Abstand 0 hat. Folgt dann $x \in \partial(V)$? Begründe die Antwort.

**Aufgabe 3.** Sei $X : I \times U \to E$ ein stetiges Vektorfeld, lokal uniform Lipschitz-stetig im Raum und beschränkt auf Mengen der Form $[a, b] \times V$, wobei $V \subseteq U$ positiven Abstand zum Rand $\partial(U)$ hat. Sei $\gamma : J \to U$ eine maximale Integralkurve mit $t_+ := \sup J < \sup I$. Zeige:

$$\lim_{t \nearrow t_+} \min \left\{ \operatorname{dist}(\partial(U), \gamma(t)), \ \frac{1}{\|\gamma(t)\|} \right\} = 0$$

**Aufgabe 4.** Sei $X : I \times \mathbb{B}_{2+\varepsilon}(0) \to E$ ein stetiges Vektorfeld, das auf $\mathbb{B}_2(0)$ beschränkt ist durch $D$, d.h.:

$$\|X_t(x)\| \leq D \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{B}_2(0), \ t \in I$$

In der Vorlesung habe ich die intuitiv klare Tatsache benutzt, daß ein Teilchen entlang einer Integralkurve mindestens Zeit $\frac{1}{D}$ benötigt, um von einem Punkt innerhalb von $\mathbb{B}_1(0)$ zu einem Punkt außerhalb von $\mathbb{B}_2(0)$ zu gelangen. Rechtfertige diese Intuition.

Sei also $\gamma : J \to \mathbb{B}_{2+\varepsilon}(0)$ eine Integralkurve von $X$. Es gelte $\gamma(t_0) \in \mathbb{B}_1(0)$ und $\gamma(t_1) \notin \mathbb{B}_2(0)$. Zeige: $|t_1 - t_0| \geq \frac{1}{D}$.

Hint: auf Seite 4 der Notizen zum 24ten April steht ein ganz ähnliches Argument.