Differentialgleichungen

Übungszettel 07

Abgabe: **Freitag, 30.05.**, 12:00 Uhr

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Welche Kurven schneiden alle Ursprungsgeraden unter konstantem Winkel α? Für $\alpha = 0$ sind dies offensichtlich die Ursprungsgeraden selbst und für $\alpha = 90°$ sind dies konzentrische Kreise mit dem Ursprung als gemeinsamem Mittelpunkt. Hint: in Polarkoordinaten (r, φ) lassen sich Ursprungsgeraden beschreiben durch $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = 0$.

Aufgabe 2. Löse das Anfangswertproblem

$$\left\| \begin{array}{rl} y' &= y^2 - x^2 \\ 1 &= y(0) \end{array} \right\|$$

Mache dazu einen <u>Potenzreihenansatz</u>:

$$y(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

Setze die formale Ableitung

$$y'(x) = \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}$$

und das formale Quadrat

$$y^2 = \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} x^k$$

in die Differentialgleichung ein. Zeige, daß sich eine Rekursion ergibt, die die Koeffizienten a_k eindeutig bestimmt. Dabei ergibt sich $a_0 = 1$ aus der Anfangsbedingung.

Schließlich zeige, daß die Potenzreihe Konvergenzradius mindestens 1 hat und darum auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$ eine Lösung des Anfangswertproblems darstellt. Hint: hierzu kann man induktiv die Abschätzung $|a_k| \leq 1$ zeigen.

Aufgabe 3. Löse das Anfangswertproblem

$$\left\| \begin{array}{rl} y' &= y^2 \\ 1 &= y(0) \end{array} \right\|$$

Mache dazu wieder einen <u>Potenzreihenansatz</u>:

$$y(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

und verfahre wie in der vorigen Aufgabe.

Löse das Anfangswertproblem auch durch Trennen der Veränderlichen und zeige, daß die eben gefundene Potenzreihe die Taylorentwicklung der hier gefundenen Lösung ist.

Aufgabe 4. Sei $X : I \times U \to E$ ein zeitabhängiges Vektorfeld. Definiere das zeitunabhängige Vektorfeld

$$\begin{aligned} Y : &\longrightarrow \mathbb{R} \times E \\ (t, x) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ X_t(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diskutiere die Entsprechung von Integralkurven in X und Y. Zeige, daß die Stetigkeit des einen Vektorfeldes die des anderen impliziert. Zeige auch, daß Y nicht unbedingt Lipschitz-stetig ist, auch wenn X uniform Lipschitz-stetig im Raum ist.