Differentialgleichungen

Übungszettel 08

Abgabe: **Donnerstag, 06.06.**, 12:00 Uhr

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Sei $X : I \times U \to \mathbb{R}^d$ ein stetiges Vektorfeld. $\|X\|$ sei global beschränkt durch die Konstante K. Es sei $t_0, u_0) \in I \times U$ eine Anfangsbedingung und $\delta > 0$ eine Konstante mit $\overline{\mathbb{B}}_{K\delta}(u_0) \subset U$. Wir wissen: In dieser Situation hat das AWP $u_0 = \gamma(t_0)$ eine Lösung mindestens definiert auf $[t_0, t_0 + \delta]$.

Ein alternativer Beweis benutzt das Eulersche Polygonzugverfahren (siehe Notizen von 29.5.). Sei Σ eine Unterteilung von $[t_0, t_0 + \delta]$. Wir haben gesehen, daß es einen eindeutig bestimmten Σ-Polygonzug gibt, der zu X kompatibel ist und zur Zeit t_0 im Punkt u_0 steht. Wir notieren ihn mit γ_Σ.

Sei (Σ_n) eine Folge von Unterteilungen des Intervalls $[t_0, t_0 + \delta]$ deren Weite $w(\Sigma_n)$ gegen 0 geht. In der Vorlesung haben wir gesehen, daß wir zu einer Teilfolge übergehen können, so daß die zugehörigen Σ-Polygonzüge γ_n gleichmäßig gegen eine (automatisch stetige) Grenzfunktion $\gamma : [t_0, t_0 + \delta] \to U$ konvergieren.

Zeige, daß die Grenzfunktion γ eine Integralkurve von X ist.

Aufgabe 2. Seien $a, b > 0$ Konstanten. Betrachte das zeitunabhängige Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a - bx + x^2y - x \\ bx - x^2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zeige, daß durch einen Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ im ersten Quadranten (d.h. $x_0 > 0$ und $y_0 > 0$) genau eine Integralkurve geht, die in positiver Zeitrichtung unendlich lang existiert und den ersten Quadranten nicht verläßt.

Hint: betrachte das Vektorfeld auf den Koordinatenchsen und studiere, welche Quadrantenwechsel entlang von Integralkurven vorkommen können.

Aufgabe 3. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion f sei überdies Lipschitz-stetig. Betrachte das zeitunabhängige Vektorfeld:

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} f(x) \\ yg(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Zeige unter Angabe eines Beispiels für f und g, daß X nicht unbedingt lokal Lipschitz-stetig ist (Uniformität spielt bei zeitunabhängigen Vektorfeldern keine Rolle: sie wäre automatisch gegeben).

2. Zeige, daß X dennoch eindeutige Integralkurven hat, d.h.: zu jedem Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und zu jeder Zeit t_0 gibt es genau eine maximale Integralkurve γ mit:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

   Fragen: Wird die Lipschitz-Stetigkeit von f wirklich benötigt? Ist eine maximale Lösung stets für alle Zeiten, d.h. auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

Aufgabe 4. Betrachte das Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, u) &\longmapsto 2t - 2\sqrt{u_+} \end{aligned}$$

Dabei ist $u_+ = \max(u, 0)$.

Die Picard-Iteration zum AWP $\gamma(0) = 0$ für dieses Vektorfeld lautet:

$$\gamma_{n+1}(t) = 0 + \int_0^t 2s - \sqrt{\gamma_n(s)_+}\,\mathrm{d}\,s$$

Zeige, daß die Folge (γ_n) der Picard-Iterationen zur Anfangskurve $\gamma_0(t) = 0$ abwechselnd zwischen zwei Funktionen hin- und herspringt. Insbesondere konvergiert die Picard-Iteration nicht. Welche Voraussetzung(en) des Satzes von Picard–Lindelöf ist (sind) nicht erfüllt?