

Differentialgleichungen

Übungszettel 09

Abgabe: **Donnerstag, 13.12.**, 12:00 Uhr

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Sei $A : I \rightarrow \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ eine stetige Abbildung von einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ in den Raum der reellen $n \times n$ -Matrizen. Betrachte das lineare Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : I \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto A(t) x \end{aligned}$$

Betrachte ferner das lineare Vektorfeld

$$\begin{aligned} Y : I \times \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ (t, B) &\longmapsto A(t) B \end{aligned}$$

(Beachte, daß hier quadratische Matrizen miteinander multipliziert werden.)

Aufgabe 1. Sei $U(-, \tau) : I \rightarrow \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ die Y -Integralkurve, die zur Zeit τ durch die Einheitsmatrix läuft: $U(\tau, \tau) = 1_n$. Zeige, daß

$$t \mapsto U(t, \tau) x$$

eine X -Integralkurve ist, die zur Zeit τ durch den Punkt x läuft.

Aufgabe 2. Die Abbildung

$$\begin{aligned} U : I \times I &\longrightarrow \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ (t, \tau) &\longmapsto U(t, \tau) \end{aligned}$$

sei definiert wie in der letzten Aufgabe: $U(-, \tau)$ ist die Y -Integralkurve, die zur Zeit τ durch die Einheitsmatrix geht.

Zeige, daß U eine stetige Abbildung ist und der Bedingung

$$U(t_1, t_3) = U(t_1, t_2) U(t_2, t_3)$$

genügt. Zeige ferner, daß $U(t, \tau)$ stets invertierbar ist.

Aufgabe 3. Sei $\|-\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Dann definieren wir die Operatornorm auf $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ durch:

$$\|A\|_{\text{op}} := \inf \{ C > 0 \mid \|Av\| \leq C \|v\| \text{ für alle } v \}$$

Zeige, daß die Operatornorm tatsächlich eine Norm ist, daß sie submultiplikativ ist und daß sie mit der auf \mathbb{R}^n gegebenen Norm $\|-\|$ verträglich ist.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ eine reelle $n \times n$ -Matrix. Definiere die Exponentialfunktion für Matrizen durch die Reihe

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Zeige, daß die Reihe konvergiert. Zeige ferner, daß für kommutierende Matrizen A und B (d.h., $AB = BA$) gilt:

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$$

und bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \exp(tA)$$

Berechne

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$