Differentialgleichungen

Übungszettel 10

Abgabe: **Donnerstag, 20.6.**, 12:00 Uhr

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Bestimme die allgemeine Lösung des homogenen linearen System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Inwiefern hilft die Diagonalgestalt der Koeffizientenmatrix?

Aufgabe 2. Bestimme die allgemeine Lösung des zeitunabhängigen homogenen linearen System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Hint:

$$\begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Aufgabe 3.

1. Betrachte $\Gamma(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{smallmatrix}\right)$. Gibt es eine (zeitunabhängige) Matrix A, sodaß Γ ein Fundamentalsystem der DGL

$$\Gamma'(t) = A\Gamma(t)$$

ist? Begründe die Antwort und bestimme ggf. die eine solche Matrix A.

2. Betrachte $\Gamma(t) = \left(\begin{smallmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ e^t & \mathrm{e}^t \end{smallmatrix}\right)$. Gibt es eine stetige Funktion $A : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_{2\times 2}$, sodaß Γ ein Fundamentalsystem der DGL

$$\Gamma'(t) = A(t)\Gamma(t)$$

ist. Begründe die Antwort und finde ggf. eine solche Funktion A.

Aufgabe 4. Bestimme ein Fundamentalsystem für die homogene lineare DGL

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 2\,\mathrm{e}^t \\ t & t - \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Hint: finden Sie zunächst eine Lösung der Form $\left(\begin{smallmatrix} \psi(t) \\ -\psi(t) \end{smallmatrix}\right)$ und ergänzen Sie dann zu einem Fundamentalsystem z.B. mit dem Verfahren nach d'Alembert.