Differentialgleichungen

Übungszettel 11

Abgabe: **Donnerstag, 27.06.2018**, 12:00 Uhr

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Berechne die Matrixexponentialfunktion für Vielfache von Jordanblöcken $J_m(\lambda)$, d.h., berechne:

$$\exp(tJ_m(\lambda)) = \exp\left(t\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}\right)$$

Im Skript findet sich eine Darstellung als Matrixprodukt. In dieser Aufgabe sollen die Matrixeinträge von $\exp(tJ_m(\lambda))$ explizit bestimmt werden.

Aufgabe 2. Zeige, daß für Blockdiagonalmatrizen gilt

$$\exp\left(\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\exp(A_1) & & & \\ & \exp(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(A_l)\end{pmatrix}$$

Hier sind alle Blöcke quadratisch.

Aufgabe 3. In der Vorlesung habe ich mit der Rechnung

$$\exp\bigl(PAP^{-1}\bigr) = \sum_k \frac{(PAP^{-1})^k}{k!} = \sum_k P\frac{A^k}{k!}P^{-1} = P\left(\sum_k \frac{A^k}{k!}\right)P^{-1} = P\exp(A)\,P^{-1}$$

argumentiert, daß die Matrixexponentialfunktion sich gut verhält unter Konjugation (vulgo: Basiswechsel). Ich habe dabei Konvergenzfragen übergangen, die sich aus der Reihendarstellung für die Exponentialfunktion ergeben. Trage die nötigen Rechtfertigungen nach.

Aufgabe 4. Berechne

$$\exp\left(t\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}\right)$$

Gib auch die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL

$$\begin{pmatrix}x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t) \\ y(t) \\ z(t)\end{pmatrix}$$

an.