

# Differentialgleichungen

## Übungszettel 12

Abgabe: **Donnerstag, 04.07.2024**, 12:00 Uhr

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

**Aufgabe 1.** Beweise folgende Verallgemeinerung des Lemma von Gronwald. Für die stetigen Funktionen  $f, h : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen und die reelle Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$  möge gelten:

1.  $h(t) \geq 0$  für alle  $t$ .
2.  $f(t) \leq \alpha + \int_0^t h(s)f(s) \, ds$  für alle  $t$ .

Dann ist für alle  $t$

$$f(t) \leq \alpha e^{H(t)}$$

mit  $H(t) = \int_0^t h(s) \, ds$ .

**Aufgabe 2.** Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

$$\begin{aligned} y'' &= 6y + y', & y(0) &= 1, & y'(0) &= 0 \\ y'' &= -3y' + 4y, & y(0) &= 0, & y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Hint: Schreibe die DGL höherer Ordnung um in ein System von DGLn erster Ordnung.

**Aufgabe 3.** Welche Lösungskurve der DGL

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

hat im Punkt  $x = 0, y = \frac{1}{2}$  einen Extremwert?

**Aufgabe 4.** Bestimme die allgemeine Lösung der DGL

$$y''' + 9y'' + 27y' + 27y = 0$$