Differentialgleichungen

Übungszettel 13

Abgabe: **Donnerstag, 11.07.2024**, 12:00 Uhr

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert.

Aufgabe 1. Betrachte das zeitunabhängige Vektorfeld

$$X : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -y - x^3 \\ x - y^3 \end{pmatrix}$$

Zeige, daß X linearen Hauptteil hat und berechne dessen Eigenwerte. Untersuche die Stabilität der Ruhelage $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Hint: Leite $x^2 + y^2$ entlang einer Integralkurve nach der Zeit ab.

Entscheide, ob das zeitabhängige Vektorfeld

$$X_t : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -y - tx^3 \\ x - ty^3 \end{pmatrix}$$

ebenfalls einen linearen Hauptteil hat und ob die stationäre Integralkurve $\gamma \equiv 0$ stabil ist.

Aufgabe 2. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitzstetiges Vektorfeld mit kritischem Puunkt $0 \in U$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Es sei (u_k) eine Nullfolge in U mit $f(u_k) > 0$. Zeige, daß die Ruhelage 0 instabil ist, sofern mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Es gibt ein $\lambda > 0$, so daß $X(f) \geq \lambda f$ auf ganz U gilt.
2. $X(f)(u) > 0$ für alle $u \neq 0$.

Hint: Für eine Integralkurve γ betrachte die Verkettung $f \circ \gamma$ und ihre Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} f(\gamma(t)) = X(f)(\gamma(t))$. Der Beweis des Stabilitätssatzes von Lyapunov kann als Vorbild dienen.

Aufgabe 3. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Betrachte das zeitunabhängige Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - xg(x, y) \\ -x - yg(x, y) \end{pmatrix}$$

Zeige, daß die Ruhelage 0 asymptotisch stabil ist, wenn $g > 0$ in einer Umgebung von $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ gilt. Zeige auch, daß die Ruhelage instabil ist, wenn $g < 0$ in einer Umgebung von $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ gilt.

Hint: Betrachte die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ entlang X.

Aufgabe 4. Bestimme die kritischen Punkte (Ruhelagen / stationäre Integralkurven) des zeitunabhängigen Vektorfeldes

$$X : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \alpha x + \beta \sin(y) \end{pmatrix}$$

für alle Parameterwerte $\alpha, \beta \neq 0$. Diskutiere die Stablität, asymptotische Stabilität und Instabilität der stationären Integralkurven. Hint: Linearisiere.

Was folgt für Lösungen der DGL

$$x'' = \alpha \sin(x) + \beta x'$$

Aufgabe 5. Extra Credit: Was passiert in Aufgabe 4 für $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$. Warnung: darüber habe ich nicht gründlich nachgedacht.