1 Komplexe Zahlen

Definition 1.0.1 (Komplexe Zahl)**.** Die Menge $\mathbb{C}$ aller komplexen Zahlen besteht aus Elementen der Form $z = x + \mathrm{i}y$, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 1.0.2.

1. $\mathrm{Re}(z) = x$ ist der *Realteil* von z, beziehungsweise ist $\mathrm{Im}(z) = y$ der *Imaginärteil* von z.
2. Jede komplexe Zahl z lässt sich in Polarkoordinaten darstellen: $z = re^{\mathrm{i}\theta}$, wobei $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist der *Betrag* von z und θ ist das *Argument* (Restklasse von Winkeln mod 2π).
3. $\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$.

Definition 1.0.3 (Komplexe Konjugation)**.** Unter *komplexer Konjugation* versteht man die Abbildung $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto \bar{z} := x - \mathrm{i}y.$$

Dabei heist $\bar{z}$ auch die zu z komplex konjugierte Zahl.

Eigenschaften

1. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),\ \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z})$
2. $z.\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$, $|z| \geq 0$ mit $|z| = 0$ genau für $z = 0$
3. $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0)$

2 Holomorphe Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$.

Definition 2.0.1 (Komplexdifferenzierbarkeit an einem Punkt)**.** Eine Funktion f heißt an $z_0 \in U$ *komplex diffbar* falls

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in U \setminus \{z_0\}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.

Diffbarkeit in z_0 bedeutet $\mathbb{C}$-lineare Approximierbarkeit von f in einer kleinen Umgebung U von z_0, d.h.,

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + \Delta(z_0, z),$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\Delta(z_0, z) = \mathcal{O}(|z - z_0|)$.

Satz 2.0.2 (Cauchy–Riemann'sche Gleichungen)**.** *Eine Funktion $f = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ ist genau dann komplex diffbar in $z_0 \in U$ wenn f dort reell diffbar ist und die Cauchy-Riemmann'schen Gleichungen gelten:*

$$u_x(z_0) = v_y(z_0) \quad \textit{und} \quad u_y(z_0) = -v_x(z_0).$$

Definition 2.0.3 (Holomorphie)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph* in U, wenn f in jedem Punkt von U komplex diffbar ist.

Satz 2.0.4. *$f : U \to \mathbb{R}^2$ sei als reelle Funktion stetig (partiell) diffbar und es seien die CR-DGLen*

$$u_x = v_y \quad \textit{und} \quad u_y = -v_x$$

in ganz U erfüllt. Dann ist f in U holomorph.

Bemerkung 2.0.5. Falls $f(z)$ diffbar ist, so ist die komplexe Ableitung $f'(z)$ gegeben durch

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x.$$

Sind f und g in $z_0 \in U$ komplex diffbar, so auch $f + g, fg$ und $f \circ g$. Die Funktion $\frac{f}{g}$ ist auch in z_0 komplex diffbar wenn $g(z_0) \neq 0$.

Beispiel 2.0.6. Sei $z = x + \mathrm{i}y$.

1. $f(z) = \mathrm{e}^z := \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, mit $f'(z) = \mathrm{e}^z = f(z)$

2. Die komplexen Versionen von cos und sin, die durch

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$$
$$\sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$$

definiert sind, sind auch holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos(z) = -\sin(z) \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin(z) = \cos(z).$$

3. Alle komplexen Polynome $P \in \mathbb{C}[z]$ sind holomorph auf ganz $\mathbb{C}$.

Jede komplexe Funktion $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ lässt sich als eine Funktion von z und $\bar{z}$ schreiben. Dadurch bekommt man die folgende komplexe Form der CR-DGLen.

Satz 2.0.7. *Sei f in z_0 reell diffbar. Dann ist f dort genau dann komplex diffbar wenn*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Definition 2.0.8. Es sei Δ der Laplace Operator, also

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Eine zweimal stetige differenzierbare Funktion heißt *harmonisch* wenn $\Delta f = 0$.

Proposition 2.0.9. *Holomorphe Funktionen sowie ihre Real- und Imaginärteile sind harmonisch.*

3 Integralsätze

Sei $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen.

Definition 3.0.1 (Weg)**.** Ein Weg ist eine Funktion $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, die stetig und stückweise stetig diffbar ist, also existiert eine Zerlegung von $[a, b]$ in Teilintervalle gemäß $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = b$ so dass $\gamma|_{[\alpha_j,\alpha_{j+1}]}$ stetig diffbar ist. Ein Weg heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definition 3.0.2 (Wegintegral)**.** Sei $\gamma : [a, b] \to U$ ein Weg. Dann heißt

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

Wegintegral von f entlang γ.

Ein *Gebiet* G ist eine offene und wegzusammenhängende (d.h. je 2 Punkte von G können durch einen Weg verbunden werden) Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Satz 3.0.3. *Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Besitzt $f(z)$ die Stammfunktion $F(z)$, so ist F in G holomorph, mit $F' = f$.*

Folgerung 3.0.4. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$, $f = u + \mathrm{i}v : G \to \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Es gibt eine holomorphe (in G) Funktion F mit $F' = f$.*
2. *$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ im G.*
3. *$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ ab.*

Definition 3.0.5 (Umlaufzahl)**.** Ist γ in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ geschlossen, so heißt

$$\mathrm{Uml}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a} \in \mathbb{Z}$$

die Umlaufszahl von γ um a.

Satz 3.0.6 (Satz von Goursat)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, f in G holomorph. Das Rechteck R liege ganz in G. Dann ist*

$$\int_{\partial R} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Bemerkung 3.0.7. Es gibt auch Varianten vom Satz von Goursat für Dreiecke und für Polygonzüge.

Definition 3.0.8. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \setminus \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ holomorph mit $\xi_j \in G$. Dann heißt ξ_j *harmlos* wenn

$$\lim_{z\to\xi_j} (z - \xi_j)f(z) = 0.$$

Solche Punkte sind auch als *hebbare Singularitäten* bekannt.

Bemerkung 3.0.9. Es gibt auch eine Variante vom Satz von Goursat für ein Gebiet mit harmlosen Punkten bezüglich f.

Definition 3.0.10. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Der Hauptzweig des komplexen Logarithmus $\mathrm{Log}(z)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{Log}(z) := \log |z| + \mathrm{i}\arg(z)$$

wobei $\arg(z) \in [-\pi, \pi)$.

In dem geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ist $\mathrm{Log}(z)$ holomorph, mit $\mathrm{Log}(w)' = \frac{1}{w}$.

Satz 3.0.11 (Cauchy'scher Integralsatz für den Kreis)**.** *D sei eine offene Kreisscheibe, z.B. $D = B_\varrho(z_0)$, $\varrho > 0$, und f sei holomorph in D. Für jeden geschlossenen Weg γ in D gilt dann*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Folgerung 3.0.12 (Cauchy für Kreis mit harmlosen Punkten)**.** *Gilt analog für Kreisscheiben mit harmlosen Punkten $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ bezüglich f, mit $\gamma \subset D \setminus \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.*

Satz 3.0.13 (1. Hauptsatz der Funktionentheorie, Cauchy'sche Integralformel)**.** *$D = B_\varrho(z_0)$ sei offene Kreisscheibe, $f : D \to \mathbb{C}$ sei holomorph, $a \in D$. Für jeden geschlossenen Weg γ in D, der a nicht trifft, gilt*

$$f(a)\mathrm{Uml}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z.$$

Satz 3.0.14 (CIF für höhere Ableitungen)**.** *Sei D, f wie oben. Dann ist f in D ∞-oft komplex diffbar. Ist γ ein geschlossener Weg in D und z_0 ein Punkt der nicht auf γ liegt, so gilt*

$$f^{(n)}(a)\mathrm{Uml}(\gamma, a) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

für alle $n \geqslant 0$.

Satz 3.0.15 (Satz von Morera)**.** *$G \subseteq \mathbb{C}$ sei Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ sei stetig. Gilt $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ für jeden geschlossenen Weg in G, so ist f in G holomorph.*

Bemerkung 3.0.16. Holomorphie ist eine *lokale* Eigenschaft, d.h., f ist in G holomorph genau dann wenn zu jedem $z \in G$ eine Umgebung $U = U(z)$ existiert, so dass $f|_U$ eine Stammfunktion hat.

Proposition 3.0.17. *Sei f in G holomorph, $z_0 \in G$. Wähle $r > 0$ so dass $\overline{B_r(z_0)} \subset G$. Sei $\gamma = \partial B_r(z_0)$ mit positivem Durchlaufsinn. Dann gilt*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leqslant \frac{n!}{r^n} M_r(z_0)$$

für $n \geqslant 0$, mit $M_r(z_0) := \max_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta)|$.

Satz 3.0.18 (Satz von Liouville)**.** *Ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.*

Korollar 3.0.19 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Sei $P(z)$ ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Besitzt P keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, so ist P konstant.*

4 Komplexe Potenzreihen und analytische Funktionen

Definition 4.0.1. Sei $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ heißt *konvergent* wenn die Folge der Partialsummen $\sum_{j=0}^{n} b_j \in \mathbb{C}$ konvergiert, und *absolut konvergent* wenn $\sum_{j=0}^{n} |b_j|$ konvergiert.

Satz 4.0.2.

1. *Wenn $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergiert, ist $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge.*
2. *Absolutkonvergenz impliziert Konvergenz.*
3. *Bei absolutkonvergenz ändert sich der Wert der Reihe bei Umordung der Terme nicht.*

Definition 4.0.3 (komplexe Potenzreihe)**.** Eine komplexe Potenzreihe ist von der Form $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, mit $a_j \in \mathbb{C}$ und z als komplexe Variable betrachtet.

Satz 4.0.4. *Es gibt ein $0 \leqslant \varrho \leqslant \infty$, den* Konvergenzradius *der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, mit*

1. *Für z mit $|z| < \varrho$ konvergiert die Reihe absolut; die Konvergenz ist absolut gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $B_\varrho(0)$.*
2. *Für $|z| > \varrho$ divergiert die Reihe.*
3. *Auf dem Rand ($|z| = \varrho$) kann alles Mögliche passieren*

Folgerung 4.0.5 (Cauchy–Hadamard)**.**

$$\varrho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Beispiel 4.0.6 (Die (komplexe) geometrische Reihe)**.**

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z} \qquad \text{für } |z| < 1 = \varrho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}}$$

Bemerkung 4.0.7. Sei $\varrho > 0$ der Konvergenzradius von $\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$. Dann ist $f : B_\varrho(0) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$, holomorph auf $B_\varrho(0)$ mit

$$f'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m z^{m-1}.$$

Außerderm ist ϱ auch der Konvergenzradius von f'.

Definition 4.0.8 (komplexe Analytizität)**.** $G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet. Dann heißt $f : G \to \mathbb{C}$ (komplex) analytisch genau dann wenn f sich sich lokal in eine Potenzreihe entwickeln lässt, d.h., $\forall z_0 \in G$, existiert eine Umgebung $U = U(z_0)$, komplexe Zahlen $a_m \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m \quad \text{auf } U.$$

Bemerkung 4.0.9. Die Koeffizienten a_m lassen sich durch ableiten von f ausrechnen, d.h.,

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}.$$

Satz 4.0.10 ("Peng"-Prinzip I, Holomorphie und Analytizität)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $z_0 \in G$ und $B_\varrho(z_0)$ eine Kreisscheibe, die ganz in G liegt, so ist*

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m$$

für alle $z \in B_\varrho(z_0)$. Dabei kann ϱ maximal gewählt werden.

Folgerung 4.0.11 (Charakterisierung holomorpher Funktionen)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist holomorph auf G;*
2. *f ist analytisch auf G;*
3. *f is stetig und besitzt lokal eine Stammfunktion;*
4. *f is reell diffbar und erfüllt die CR-DGLen.*

$$\text{Goursat} \longrightarrow \text{CIS} \longrightarrow \text{CIF} \longrightarrow \text{Taylor-Reihen}$$

Satz 4.0.12 (Riemann'scher Hebbarkeitsatz)**.** *$G \subseteq \mathbb{C}$ sei Gebiet, $a \in G$, $f : G \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Ist a ein harmloser Punkt für f, so existiert $\lim_{z \to a} f(z)$. Mit $f(a) := \lim_{z \to a} f(z)$ ist dann eine Fortsetzung von f definiert, die auf ganz G holomorph ist.*

Sei G Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in G$,

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(m)}(a)}{m!}}_{=: c_m} (z - a)^m$$

Definition 4.0.13 (Nullstelle)**.** Wenn $f(a) = 0$, heißt a *Nullstelle* von f. Die Ordnung k einer Nullstelle ist die Zahl mit

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_{k-1} = 0 \quad \text{und} \quad c_k \neq 0.$$

Bemerkung 4.0.14. Besitzt f in a eine Nullstelle der Ordnung k, so existiert eine holomorphe Funktion $f_k(z)$ auf G mit

$$f(z) = (z - a)^k \cdot f_k(z) \text{ in } G$$

und $f_k(a) \neq 0$.

Definition 4.0.15 (Pol)**.** Sei f holomorph in $G \setminus \{a\}, a \in G$. Dann heißt a *Pol* von f genau dann, wenn

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty \quad \text{oder, äquivalent dazu,} \quad \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Die Ordnung k eines Pols ist die Ordnung der Nullstelle a von $\frac{1}{f}$.

Bemerkung 4.0.16. Besitzt f in a einen Pol der Ordnung k, so existiert eine holomorphe Funktion $\tilde{h}(z)$ in einer Umgebung von a mit

$$f(z) = (z-a)^{-k} \cdot \tilde{h}(z) \text{ in } G$$

und $\tilde{h}(a) \neq 0$.

Definition 4.0.17. $f : G \setminus \{a\}$ sei holomorph. Dann heißt a *Singularität* von f.

Wir vereinbaren nun eine Klassifikation wie folgt:

1. *harmlos/hebbar*: Dort is f holomorph fortsetztbar
2. *Pol*: $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ und $\frac{1}{f}$ hat eine Nullstelle endlicher Ordnung in a
3. *wesentlich*: alle verbleibenden Fälle.

5 Residuen und Laurentreihen

Definition 5.0.1. Ein Weg γ in G heißt *nullhomolog* genau wenn, $\operatorname{Uml}(\gamma, a) = 0$ für alle $a \notin G$.

Definition 5.0.2. Sind γ_i Wege, so heißt $\gamma := \sum_{i=1}^n m_i\gamma_i$ mit $m_i \in \mathbb{Z}$ eine *Kette*. Der *Träger* einer Kette ist $\operatorname{tr}(\gamma) := \bigcup_{m_i \neq 0} \operatorname{Bild}(\gamma_i)$. Eine Kette γ heißt *geschlossen*, wenn alle γ_i geschlossen sind. Ist G ein Gebiet, und γ eine Kette mit $\operatorname{tr}(\gamma) \subset G$, so heißt γ *nullhomolog* wenn γ geschlossen ist und $\operatorname{Uml}(\gamma, a) = 0$, für alle $a \notin G$.

Bemerkung 5.0.3. Es gibt eine Verallgemeinerung des Satzes von Cauchy (bzw. CIF) für ein beliebiges Gebiet G und nullhomologen Ketten in G.

f sei holomorph in einer gelochten Umgebung von a, also $a \in U$, U offen, $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. $\overline{B_r(a)}, (r > 0)$ liege ganz in U, $\partial B_r(a)$ habe die übliche Parametrisierung

Definition 5.0.4. Das *Residuum* von f an der Stelle a ist das normierte Integral

$$\operatorname{Res}_a f(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_r(a)} f(z) \mathrm{d}z.$$

Bemerkung 5.0.5. Das Residuum ist eine lokale Eigenschaft von f und ist von r unabhängig (solange $\overline{B_r(a)} \subset U$).

Definition 5.0.6. Eine (formale) Reihe der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n \in \mathbb{C}$ heißt *Laurent-Reihe.*

Gegeben: $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r < R$, $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet mit

$$\overline{K} := \{z \mid r \leqslant |z - z_0| \leqslant R\} \subset G,$$

$f : G \to \mathbb{C}$ holomorph

Satz 5.0.7 (Laurent-Reihe im Kreisring)**.** *Seien die Voraussetzungen wie oben, und sei*

$$a_n := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\substack{\partial B_R(z_0), n \geqslant 0 \\ \partial B_r(z_0), n < 0}} \frac{f(\zeta) \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Dann gilt in K:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Satz 5.0.8 (Peng-Prinzip II, Hol. auf gelochten Umgebungen und Laurentreihen)**.** *f sei in $G \setminus \{z_0\}$ holomorph, γ sei nullhomolog in G mit $z_0 \in \operatorname{tr}(\gamma)$ und $\operatorname{Uml}(\gamma, z_0) = 1$ und sei*

$$R := \sup \{r > 0 \mid B_r(z_0) \subseteq G\}.$$

Dann gilt für $0 < |z - z_0| < R$ die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Frage 5.0.9. $f(z)$ habe in a Pol der Ordnung m. Was ist $\mathrm{Res}_a f(z)$?

In einer kleiner Umgebung $U(a)$ ist $h(z) := (z-a)^m f(z)$ holomorph und hat die Zerlegung

$$h(z) := b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 \dots .$$

Davon bekommt man eine Zerlegung (Laurent-Entwicklung) von $f(z)$ als

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^m + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \ldots + c_{-1}(z-a)^{-1} + g(z)$$

mit $c_j = b_{m+j}, c_{-m} \neq 0, g(z)$ holomorph in U.

Definition 5.0.10. $g(z)$ heißt *holomorpher* Teil von f und $f - g$ *Hauptteil* von f.

Satz 5.0.11 (Residuum und Taylor-Entwicklung von h)**.** *Sei f eine holomorphe Funktion in $U \setminus \{a\}$ mit einem Pol m-ter Ordnung in $a \in U$. Dann gilt*

$$\mathrm{Res}_a f(z) = c_{-1},$$

d.h., das Residuum von f an a ist der Koeffizient von $(z-a)^{-1}$ in der Laurent-Entwicklung von f.

Folgerung 5.0.12. *Hat $f(z)$ in a einen Pol 1.Ordnung, so ist*

$$\mathrm{Res}_a f(z) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

Im allgemein (für einen Pol n-ter Ordnung) gilt

$$\mathrm{Res}_a f(z) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \big((z-a)^n f(z)\big).$$

Satz 5.0.13 (Residuensatz)**.** *$G \subseteq C$ sei Gebiet, $a_1, \ldots, a_n \in G$. γ sei nullhomologe Kette in G, mit $\mathrm{tr}(\gamma) \subset G \in \{a_1, \ldots, a_n\}$. Ist $f : G \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ holomorph, so gilt*

$$\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Uml}(\gamma, a_j) \mathrm{Res}_{a_j} f(z).$$

Bemerkung 5.0.14. Die CIF kann als Spezialfall des Residuensatzes gedeutet werden.

Folgerung 5.0.15 (Laurent-Reihen und Singularitäten)**.** *$f : G \setminus \{z_0\}$ sei holomorph. Dann hat f in z_0*

1. *eine hebbare Singularität $\iff$ $a_n = 0$ für alle $n < 0$*
2. *einen Pol $\iff$ $\exists n_0 < 0 : a_n = 0$ für $n < n_0$ und $a_{n_0} \neq 0$*
   ($|n_0|$ ist dann die Ordnung des Pols)

3. *eine wesentliche Singularität* $\iff$ $a_n \neq 0$ *für unendlich viele* $n < 0$

Definition 5.0.16. $Z \subset \mathbb{C}$ heißt *diskret*, wenn zu jedem $x \in Z$ eine Umgebung $U = U(x)$ existiert, mit $Z \cap U = \{x\}$.

Definition 5.0.17. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \setminus Z \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Ist Z diskret und hat f für kein $a \in Z$ eine wesentliche Singularität, so heißt f *meromorph.*

Satz 5.0.18 (Maximumsprinzip)**.** *$G \subseteq \mathbb{C}$ sei Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$. Ist z_0 ein lokales Maximum von $|f|$, so ist f konstant. Ist obendrein G beschränkt, und f stetig nach $\overline{G}$ fortsetzbar, so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand an:*

$$|f(z)| \leqslant \max_{w \in \partial G} |f(w)|, \qquad \textit{für alle } z \in G.$$

Satz 5.0.19 (Minimumsprinzip)**.** *$f : G \to \mathbb{C}$ sei nicht konstant, holomorph, und habe keine Nullstelle in G. Dann hat $|f|$ kein lokales Minimum in G. Ist f stetig nach $\overline{G}$ fortsetzbar und ist G beschränkt, so nimmt $|f|$ sein Minimum auf ∂G an.*