Gewöhnliche Differentialgleichungen

[WS 2001/2002 (M. Baake)]
SoSe 2025 (M. Baake, N. Mañibo)

Plan der Vorlesung:

- Einstimmung
- Elementar integrierbare Gleichungen
- Dglen 1. Ordnung
- Dglen höherer Ordnung
- Systeme von Dglen
- Lineare Dglen
- Anfangs-, Rand- und EW-Probleme
- Qualitative Theorie

Literatur:

- W. Walter, Gew. Dglen, 7. Aufl., Springer, Berlin (2000)
- H. Heuser, Gew. Dglen, 3. Aufl., Teubner, Stuttgart (1995)
- H. Amann, Gew. Dglen, 2. Aufl., de Gruyter, Berlin (1995)
- V. I. Arnold, Gew. Dglen, 2. Aufl., Springer

Einstimmung

Bestimmung einer Größe: durch Gleichung,
z. B.:

$\sqrt{2}$ ist (pos.) Lsg. von $\boxed{x^2 - 2 = 0}$

Berechnung:

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f(x) = x^2 - 2$$

$$= \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2} x_n + x_n^{-1}$$

$x_0 = 2$

$x_1 = 1{,}5$

$x_2 = 1{,}4166\ldots$

$x_3 = 1{,}4142\ldots$

$\downarrow$

konvergent!

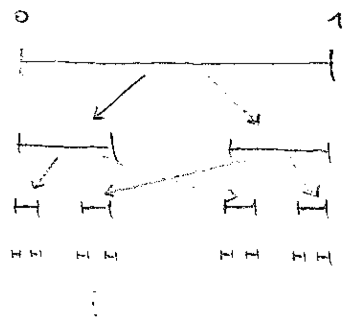
Heron-Verfahren, Spezialfall des Newton-Verfahrens

2 Aspekte: Definition und Berechnung

Schon schwieriger: π oder e.

Im allgemeinen will man aber komplizierte (oder mehr) Objekte festlegen / definieren.

Bestimmung einer Menge:



$$f_1(x) = \frac{1}{3}x$$

$$f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

IFS

Cantor-Menge!

$M_0 = [0,1]$; $M_{n+1} := f_1(M_n) \cup f_2(M_n)$

oder:

$M_0 = \{0\}$, Iteration wie oben

Dann:

$M_n \overset{\text{"konvergiert"}}{\rightsquigarrow} M_\infty$ = Cantor-Menge
= Attraktor.

Bem.:
- Sierpinski-Dreieck aus Pascal-Δ (binär)
- Effiziente Kodierung (ternäre Darstellung)
- Erzeugung durch das "Zufallsspiel".

Bestimmung einer <u>Funktion</u>:

- $f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ (rekursiv)

$$\curvearrowright \quad f_n \overset{n\to\infty}{\sim} \alpha \cdot \tau^n \qquad \left(\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

- $x_0 = c, \qquad x_{n+1} = (1+r)\, x_n$ ("Bakterienkultur")

$$\curvearrowright \quad \boxed{x_n = (1+r)^n \cdot x_0} = (1+r)^n \cdot c$$

Umdeutung: $\quad x_n \mathrel{\hat{=}} x(n\cdot\Delta t), \quad t = n \cdot \Delta t$

$$\Rightarrow \quad x(t+\Delta t) = (1 + r\cdot\Delta t)\, x(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = r \cdot x(t)$$

$$\xrightarrow{\Delta t \to 0} \quad \underbrace{\boxed{\dot{x}(t) = r\cdot x(t),}}_{\text{DGL}} \qquad x(0) = c \qquad \left(\dot{x} := \frac{dx}{dt}\right)$$

$$\curvearrowright \quad x(t) = c \cdot e^{rt} \quad \text{ist Lösung.}$$

<u>Def.:</u> Unter einer <u>gew. DGL</u> verstehen wir eine Bez. zwischen x und seinen Ableitungen von der Form

$$(*) \quad \boxed{F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0} \qquad \text{etc.}$$

Eine <u>Lösung</u> ist eine n-mal stetig diffbare Funktion, die $(*)$ erfüllt.
Sind zus. die Größen $x(t_0), \dot{x}(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)$ vorgegeben, handelt es sich um ein <u>Anfangswertproblem</u> (AWP), oder <u>Cauchy-Problem</u>.

Ein anderer Typ Gleichung:

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$$ PDE

$$\downarrow$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Oder auch:

$$\boxed{u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0}$$ <u>Wellengleichung</u>

Man sieht, daß $f(x-ct) + g(x+ct)$ eine Lösung darstellt!

Bew. und Deutung: Übung!

Derlei <u>partielle</u> Dglen werden nur am Rande vorkommen, unser Focus ist auf <u>gewöhnlichen</u> Dglen.

Trotzdem eine Referenz: (<u>die</u> Referenz!)

L.C. Evans:
Partial Differential Equations,
AMS, Providence, RI (1998)

Zurück zu: $\boxed{\dot{x}(t) = r \cdot x(t)}$, $x(0) = 1$.

Eine Lösung ist: $x(t) = e^{rt}$, wobei $x(t) > 0$.

Sei $y(t)$ eine (evtl. andere) Lösung.
Setze $z(t) = y(t) / x(t)$, und bilde:

$$\dot{z}(t) = \frac{\dot{y}(t) \cdot x(t) - y(t) \cdot \dot{x}(t)}{(x(t))^2}$$

$$= \frac{1}{(x(t))^2} \cdot \left(r \cdot y(t) \cdot x(t) - y(t) \cdot r \cdot x(t) \right) \equiv \underline{\underline{0}}$$

Aus der Analysis wissen wir, dass nur die konstante Fktn. die Abl. $= 0$ hat, also:

$z(t) \equiv a$, mit $a = y(0) / x(0) = 1$.

$\Rightarrow$ $\underline{y(t) \equiv x(t)}$, und obige Lösung ist <u>eindeutig</u>.

<u>Def.:</u> $x(t) = e^t$ ist die (eindeutig bestimmte!) Lösung von $\dot{x}(t) = x(t)$ mit $x(0) = 1$ <u>(AWP)</u>

oder:

<u>Def.'</u>: $e^t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$

Wie hängt das zusammen?

Sei $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, wobei $f(0) = 1$.

Dann ist $\frac{d}{dt} f(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = f(t)$ (abs. konv. !), und f erfüllt das AWP.

Sei nun das AWP betrachtet:

$$\dot{x}(t) = x(t), \qquad x(0) = 1$$

$$\curvearrowright \quad \boxed{x(t) = x(0) + \int_0^t x(\tau)\, d\tau} \quad \text{Volterra-Gleichung}$$

Iteration: $x_0(t) \equiv 1$,

$$x_{n+1}(t) = x_n(0) + \int_0^t x_n(\tau)\, d\tau$$

$$x_0(t) = 1$$
$$x_1(t) = 1 + t$$
$$x_2(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$
$$\vdots$$

$$\curvearrowright \quad x_n(t) = \sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{m!} \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} = e^t$$

Man kann also mit beiden Zugängen starten!

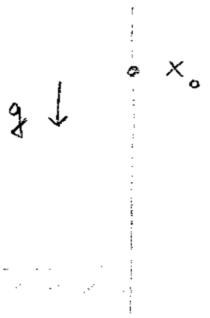
(Ex) Weltbevölkerung:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\lambda t} \qquad (\text{mit } t = 0 \mathrel{\hat{=}} 1950):$$

$$x_0 \simeq 2.51 \text{ Milliarden}$$
$$\lambda \simeq 0.018 \; [y^{-1}]$$

Beschreibung ist erschreckend gut, kann aber nicht wirklich stimmen! $\curvearrowright$ Logistische Gl. !

Der freie Fall:



"$F = m \cdot a$" (Newton)

$m = 1$ [kg] , $a = g$ $\left(9{,}81 \frac{m}{sec^2}\right)$

$$\curvearrowright \quad \boxed{\ddot{x}(t) = g} \qquad \circledast$$

$$\int_0^t \ddot{x}(\tau)\, d\tau = \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = \int_0^t g\, d\tau = gt$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \dot{x}(0) + gt$$

$$\int_0^t \dot{x}(\tau)\, d\tau = x(t) - x(0) = \int_0^t (\dot{x}(0) + g\tau)\, d\tau$$

$$= \dot{x}(0) \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \underbrace{x(0)}_{x_0} + \dot{x}(0) \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$x_0 + v_0 \cdot t + \underbrace{\frac{1}{2} g t^2}_{\text{aus Schule bekannt!}}$$

Wir sehen:

- Für die Fixierung einer eindeutigen Lösung von ⊛ benötigen wir offenbar 2 Konstanten!
- Das AWP würde also lauten:

$\ddot{x} = g$

$x(0) = x_0$ (Anfangspos.)

$\dot{x}(0) = v_0$ (Anfangsgeschw.)

Implizite Gleichung:

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

Explizite Gleichung:

$$x^{(n)}(t) = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

Ex $\quad \dot{x} - x = 0 \quad : \quad F(t, x, \dot{x}) = \dot{x} - x$

$\dot{x} = x \quad ; \quad f(t, x) = x$

$(x(t) = c \cdot e^{t})$ $\quad \curvearrowright$ autonom

Ex $\quad \dot{x} = t^2, \quad x(0) = c$

$$\curvearrowright \int_0^t \dot{x}(\tau)\,d\tau = x(t) - c = \int_0^t \tau^2\,d\tau$$

$$= \frac{1}{3} t^3$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = c + \frac{1}{3} t^3$$

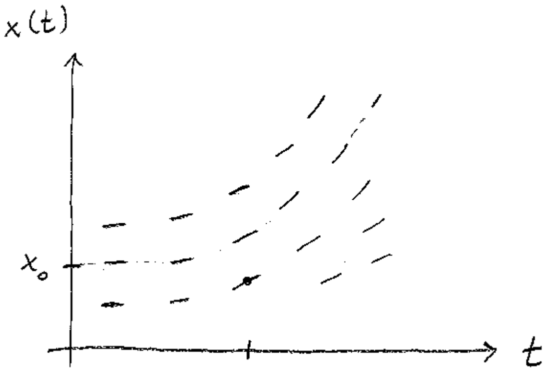
Ex $\quad \boxed{\dot{x} = f(t)}$

$$\int_{t_0}^{t} \dot{x}(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

Stammfunktion von f.

$$\Rightarrow \quad x(t) = x(t_0) + \phi(\tau)\Big|_{t_0}^{t}$$

Was bedeutet das geometrisch?

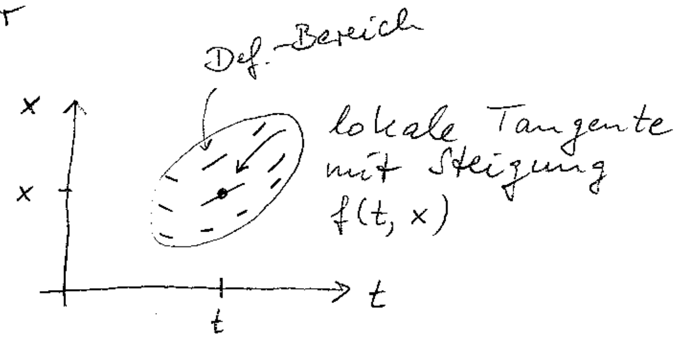


"Richtungsfeld"

Die Lösung von $\dot{x} = f(t)$ verläuft so durch das Richtungsfeld, dass die Ableitung von x stets $f(t)$ ist ($\rightarrow$ kleine Tangente mit Steigung $f(t)$).

Dies ist nicht auf diesen Fall beschränkt, sondern geht auch für

$$\dot{x} = f(t, x)$$



Hier begegnet uns ein kleines Problem, das wir oben außer Acht gelassen haben:

- $x(t)$ kann nur Lösung der DGL sein, wenn $x(t)$ auf einem Intervall diffbar ist, das ggf. t_0 enthält!
- $\{t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^{(n-1)}(t)\}$ darf nicht aus dem erlaubten Bereich für die Argumente von f herauslaufen!

Richtungsfeld und numerische Lösung:
das <u>Euler-Verfahren</u>.

Betrachte:

$$\boxed{\dot{x} = f(t, x) \quad , \qquad x(t_0) = x_0}$$

↳ Deutung als Richtungsfeld

Approximation der Lösung an der Stelle $t_0 + \Delta t$:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

$$= x(t_0) + \Delta t \cdot f(t', x(t'))$$

mit $t' \in (t_0, t_0 + \Delta t)$ nach MWS

$$\simeq x(t_0) + \Delta t \cdot f(t_0, x(t_0))$$ (wenn Δt klein ist)

Für mehrere Schritte (<u>Euler-Verfahren</u>):

$$\left[\begin{array}{l} t_k = t_0 + k \cdot \Delta t \quad , \qquad 0 \leq k \leq n \, , \quad t_n = t \, , \quad \Delta t = \frac{t - t_0}{n} \\ x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot f(t_k, x_k) \quad , \qquad 0 \leq k \leq n-1 \end{array}\right.$$

Dann ist x_k eine (zunehmend schlechtere) Näherung für $x(t_k)$.

Bessere Verfahren verwenden günstigere Interpolationen, und laufen unter dem Namen "<u>Runge-Kutta-Verfahren</u>". (→ Numerik)