Ergänzungen

(1) Abhängigkeit von Anfangsbed. + Parametern

Erwartung: wenn sich "etwas" an den Auf.-bed. tut, sollte sich auch nur "etwas" an der Lösung tun, ebenso bei Parametern.

Betrachte: $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}; \overset{\swarrow \text{ Parameter}}{\lambda})$

$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (\text{oder } \underline{x}_0(\lambda))$

Das formuliert man etwas allgemeiner auf der Ebene der Volterra-Gleichung:

$$\circledast \quad \underline{x}(t;\lambda) = \underline{g}(t;\lambda) + \int_{\alpha(\lambda)}^{t} \underbrace{\underline{k}}_{\uparrow \text{ Integralkern}}(t, \tau, x(\tau;\lambda); \lambda)\, d\tau$$

Dabei sind t, τ etc. reell, der Rest darf auch mal komplex sein.

Satz: $J = [a,b]$, $G \subset \mathbb{R}^m$: kompakt.

$$\left.\begin{array}{l} \underline{g}: J \times G \to \mathbb{R}^n \\ \alpha: \quad G \to J \\ \underline{k}: J \times J \times \mathbb{R}^n \times G \to \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \text{ alle stetig}$$

+ Lipschitzbed.:

$$\| \underline{k}(t, \tau, \underline{u}; \lambda) - \underline{k}(t, \tau, \underline{v}; \lambda) \| \le L \, \| \underline{u} - \underline{v} \| .$$

Dann hat $\circledast$ für alle $\lambda \in G$ genau eine Lösung $\underline{x}(t;\lambda)$, und diese ist als Funktion von $(t;\lambda)$ stetig, auf $J \times G$.

(Gilt auch im komplexen!)

Bew.: Analog zu Picard-Lindelöf, also wieder über ein Kontraktionsargument!
(Details: s. Walter).
Die Stetigkeit ist dabei "Nebenprodukt". □

Folgerung: Die Volterra-Iterationen konvergieren auf $J \times G$ gleichmäßig gegen die Lösung. □

(Bem.: Gleichmäßig wegen Kompaktheit!)

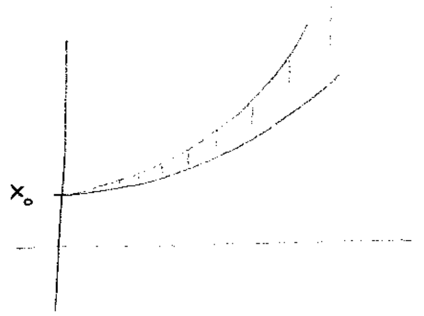
Erweiterungen hin zu Differenzierbarkeit (nach λ) und Holomorphie sind auch möglich.

Doch Vorsicht:

$$\dot{x} = a x \ , \quad x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t;a) = x_0 \cdot e^{at}$$

Also speziell für $a > 0$ im Vergleich zu $a + \varepsilon$ bei gleichem x_0:

$$x_0 \, e^{(a+\varepsilon)t} = x_0 \, e^{at} \, \underline{e^{\varepsilon t}}$$



Abstand nimmt stetig in ε zu, aber auch exponentiell in t!

Fazit: Wenn man Anfangsbed. oder Parameter nicht genau kennt (und das ist normal!), muss man mit Vorhersagen "bescheiden" sein.

→ Wetter → Chaos!

kann es noch schlimmer kommen?

Nein - dafür sorgt die <u>Trompetenabschätzung</u>:

<u>Lemma</u> (Gronwall)

Sei ϕ stetig auf $J = [0, a]$, und es gelte

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_0^t h(s)\,\phi(s)\,ds =: \psi(t)$$

mit $\alpha \geq 0$, $\underline{h(t) \geq 0}$ und h diffbar auf J.

Dann ist

$$\phi(t) \leq \alpha \cdot e^{H(t)}, \quad t \in J,$$

mit $H(t) = \int_0^t h(s)\,ds$.

<u>Bew.</u>: $\boxed{\text{DUGL}}$

Wir haben $\dot{\psi}(t) = h(t)\,\phi(t) \leq h(t)\,\psi(t)$

und $\psi(0) = \alpha$, also $\dot{\psi} \leq h(t)\,\psi$

Sei $\dot{\omega} = h(t) \cdot \omega$, mit $\omega(0) = \alpha$ (AWP),

dann ist

$$\phi(t) \leq \psi(t) \overset{(!)}{\leq} \omega(t) = \alpha \cdot e^{H(t)}$$

mit $H(t)$ wie angegeben, nach einem früheren Satze! $\square$

(Intuition: $\psi(t+\varepsilon) = \psi(t) + \varepsilon \cdot \dot{\psi}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$)

<u>Bem.</u>: Eigentlich haben wir soeben unsere erste Differential<u>un</u>gleichung gelöst!

Lösungen können auseinanderlaufen, müssen aber nicht! Denn:

Vergleiche $\dot{x} = ax$ für $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$!

↪ später: Stabilitätstheorie!

(2) PDEs & Randwertprobleme

(1) Wellengleichung in 1D:

$$(*) \quad \boxed{u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0} \qquad c > 0.$$

(Schallgeschw.)

(mit $u(x,0) = f(x)$
und $u_t(x,0) = c \cdot g(x)$)

Lösung:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}_{\overset{!}{=}} u = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad \text{(Ann.: } u \text{ ist } C^2\text{)}$$

Idee: $u = f + g$

mit $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) g = 0.$

Betrachte $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) f = 0.$

Einfachste Lösung: $f(x,t) = x - ct$

Allgemeine Lösung: $f(x,t) = \phi(x - ct)$

Satz (Wdh.):

Sind ϕ und ψ zwei bel. C^2-Funktionen einer Veränderlichen, so löst

$$\boxed{u(x,t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)}$$

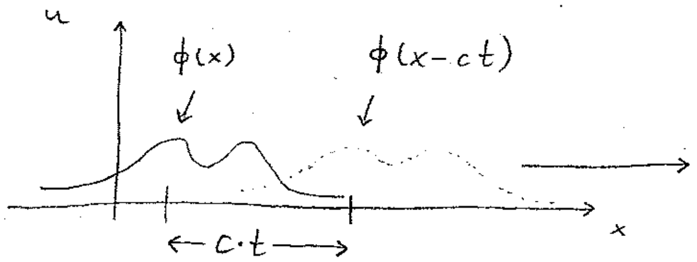
die Wellengleichung. Dies ist zugleich die allgemeine Lösung dieser Gleichung, bzw. des zug. AWP.

Bem.: Dies sind Lösungen; dass es alle sind, muss man beweisen. Dies (und fast alles sonst zu PDEs) findet man in:

[L.C. Evans,
Partial Differential Equations,
AMS, Providence, RI (1998)

↷ Übung

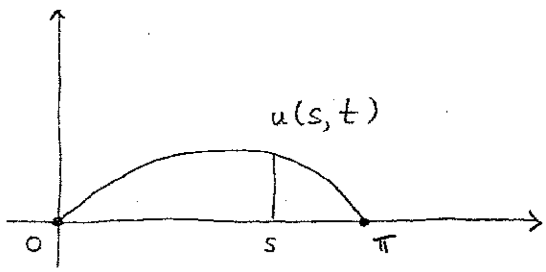
Bedeutung:



(umgekehrt für ψ)

Sind wir damit fertig?

Nein! Denn:



eingespannte Saite

PDE: $\boxed{u_{tt} = \alpha^2 u_{ss}}$ $(\alpha > 0)$

Wir kennen die allg. Lösung, aber sie nützt uns wenig, wenn wir konkreten Zugriff haben wollen!

Idee erläutern!
$\to$ Warum klappt das?

Also von vorne!

<u>Separationsansatz:</u> $\boxed{u(s,t) = v(s)\cdot w(t)}$

Damit bekommen wir:

$$\boxed{\frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = \alpha^2 \cdot \frac{v''(s)}{v(s)} = \text{const.}}$$ (Nachrechnen!)

Setzen wir also

$$\frac{v''(s)}{v(s)} = -\lambda ,$$ so ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & v'' + \lambda v = 0 \\ (2) & \ddot{w} + \alpha^2 \lambda w = 0 \end{array}\right\} \circledast$$

Gilt $\circledast$, so erfüllt $u(s,t)$ die "Saitengleichung".
<u>Problem:</u> $v(0) = v(\pi) = 0$ (eingespannt).
Also haben wir für (1) kein AWP, sondern ein <u>Randwertproblem</u> zu lösen:

$$\boxed{v'' + \lambda v = 0 , \quad v(0) = v(\pi) \overset{!}{=} 0}$$ (RWP)

Dies hat nur für gewisse λ eine Lösung!

<u>Lemma:</u> Ist $v \not\equiv 0$ eine Lösung, so ist $\lambda > 0$.

<u>Bew.:</u>

$$\lambda \cdot \int_0^\pi (v(s))^2 ds = -\int_0^\pi v(s)\cdot v''(s)\, ds \qquad (\text{da } v'' = -\lambda v)$$

$$= -\Big[v(s)\, v'(s)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi (v'(s))^2 ds \qquad (\text{da } v(0) = v(\pi) = 0)$$

$$= \int_0^\pi (v'(s))^2 ds > 0 \qquad (\text{da } v \not\equiv 0 \Rightarrow v \not\equiv \text{const.})$$

$$\Rightarrow \lambda = \int_0^\pi (v'(s))^2 ds \Big/ \int_0^\pi (v(s))^2 ds > 0$$

$\square$

Alle (mögl.) Lösungen sind also von der Form

$$v(s) = C_1 \cdot \cos\sqrt{\lambda}\, s + C_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}\, s \ , \qquad \sqrt{\lambda} > 0$$

Nun: $v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

$v(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$

Wir brauchen (!) $C_2 \neq 0$, also $\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$, und somit $\underline{\sqrt{\lambda}\,\pi = n\pi}$.

Also: Das RWP hat nur für $\boxed{\lambda_n = n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, nicht-triviale Lösungen!

$\rightsquigarrow$ Eigenwerte: $\lambda_n = n^2$

Eigenvektoren: $v_n(s) = C_2 \cdot \sin(ns) \qquad (C_2 \neq 0)$

Damit bleibt zu lösen:

$$\boxed{\ddot{w} + (\alpha n)^2 w = 0} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

$\rightsquigarrow \quad \tilde{C}_1 \cos(\alpha n t) + \tilde{C}_2 \sin(\alpha n t)$

$\rightsquigarrow \quad u_n(s,t) := \sin(ns)\big(A_n \cos(\alpha n t) + B_n \sin(\alpha n t)\big)$

löst die Saitengleichung, mit Ber. der Einspannbedingung!

Problem: Wie beschreiben wir nun den zeitl. Verlauf des Schwingens aus einer geg. Anfangsbedingung?

$\hookrightarrow \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \quad \forall\, t \geq 0$

$u(s,0) = g(s)$ (Auslenkung)

$u_t(s,0) = h(s)$ (Anf.-Bewegung)

Dazu müsste gelten:

$$u(s,0) = g(s) = \sum_{n\geq 1} A_n \sin(ns)$$

$$u_t(s,0) = h(s) = \sum_{n\geq 1} \alpha \cdot n \cdot B_n \cdot \sin(ns)$$

Die Analyse dieser Situation führt(e) auf die Theorie der Fourier-Reihen.
Hieraus ergibt sich dann der Schwingvorgang!

Bem. Verschiedene Anfangsbed. liefern unterschiedliche "Spektren"
→ für Musiker wichtig!

Setzen wir $\alpha = 1$, und betrachten wir allgemein die trigonometrische Reihe bzw. Fourier-Reihe:

$$\boxed{x(s) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(ns) + b_n \sin(ns))}$$

auf $[-\pi, \pi]$

Dies ist nur sinnvoll, wenn Konvergenz vorliegt!
Ann.: glm. Konvergenz ($\curvearrowright$ Limes ist stetig!).

Nun bemerken wir:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ns) \sin(ms)\, ds = 0 \qquad (n, m \geq 0)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ns) \cos(ms)\, ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ns) \sin(ms)\, ds = \delta_{n,m} \end{aligned}\right\} \text{nicht für } n=m=0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1\, ds = 2.$$

Damit bekommt man dann:

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)\cos(ns)\,ds \qquad (n \geq 0) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)\sin(ns)\,ds \qquad (n \geq 1) \end{aligned}} \qquad \circledast$$

Nun drehen wir den Spieß um:
Gegeben sei eine (stetige) Funktion auf $[-\pi,\pi]$.
Dann berechnet man über $\circledast$ die Fourier-Reihe.

<u>Frage:</u> Wann konvergiert diese, z.B. punktweise?

<u>Satz:</u> Ist f auf $[-\pi,\pi]$ von <u>beschränkter Variation</u>, so konvergiert die FR für jedes $x \in (-\pi,\pi)$ gegen den Wert $m(x) = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$.
Ist f in x stetig, liegt Konvergenz gegen $f(x)$ vor.

(Heuser, Satz 136.2)

Übungsaufgabe!

Dabei ist f von <u>beschr. Var.</u> auf $[a,b]$, wenn ein $M > 0$ ex., so dass für jede Zerlegung $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = Z$ von $[a,b]$ gilt:

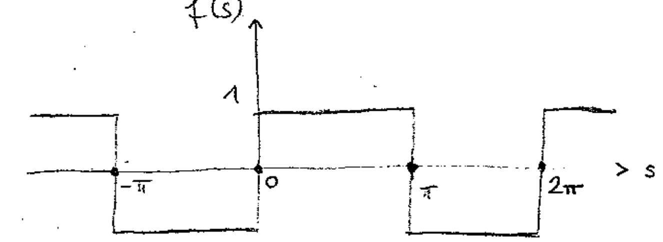
$$V(f, Z) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M$$

(z.B.: Lipschitz, beschr. Abl., Treppenf.)

Ausdehnung: $\boxed{f(x+2\pi) = f(x)}$

<u>Folgerung:</u> Die Konvergenzaussage aus vorigem Satz gilt nun auf ganz $\mathbb{R}$!

(Ex)



$$\begin{cases} f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0 \\ f(x) = \operatorname{sgn}(x) \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi \end{cases}$$

+ per. Fortsetzung

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(s) \cos(ns)}_{\text{ungerade!}} \, ds = 0 \, , \qquad n \geq 0$$

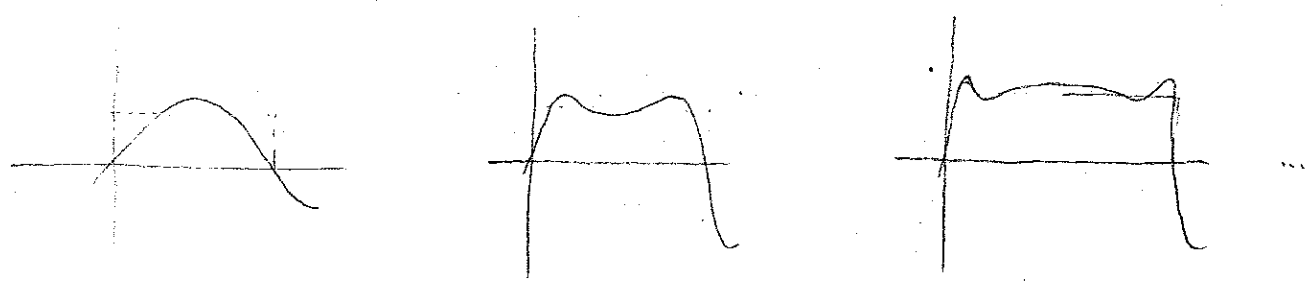
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ns) \, ds \qquad (n \geq 1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(ns) \, ds = -\frac{2}{n\pi} \cos(ns) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left(1 - (-1)^n \right) = \begin{cases} 0 , & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi} , & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also bekommen wir (zunächst formal):

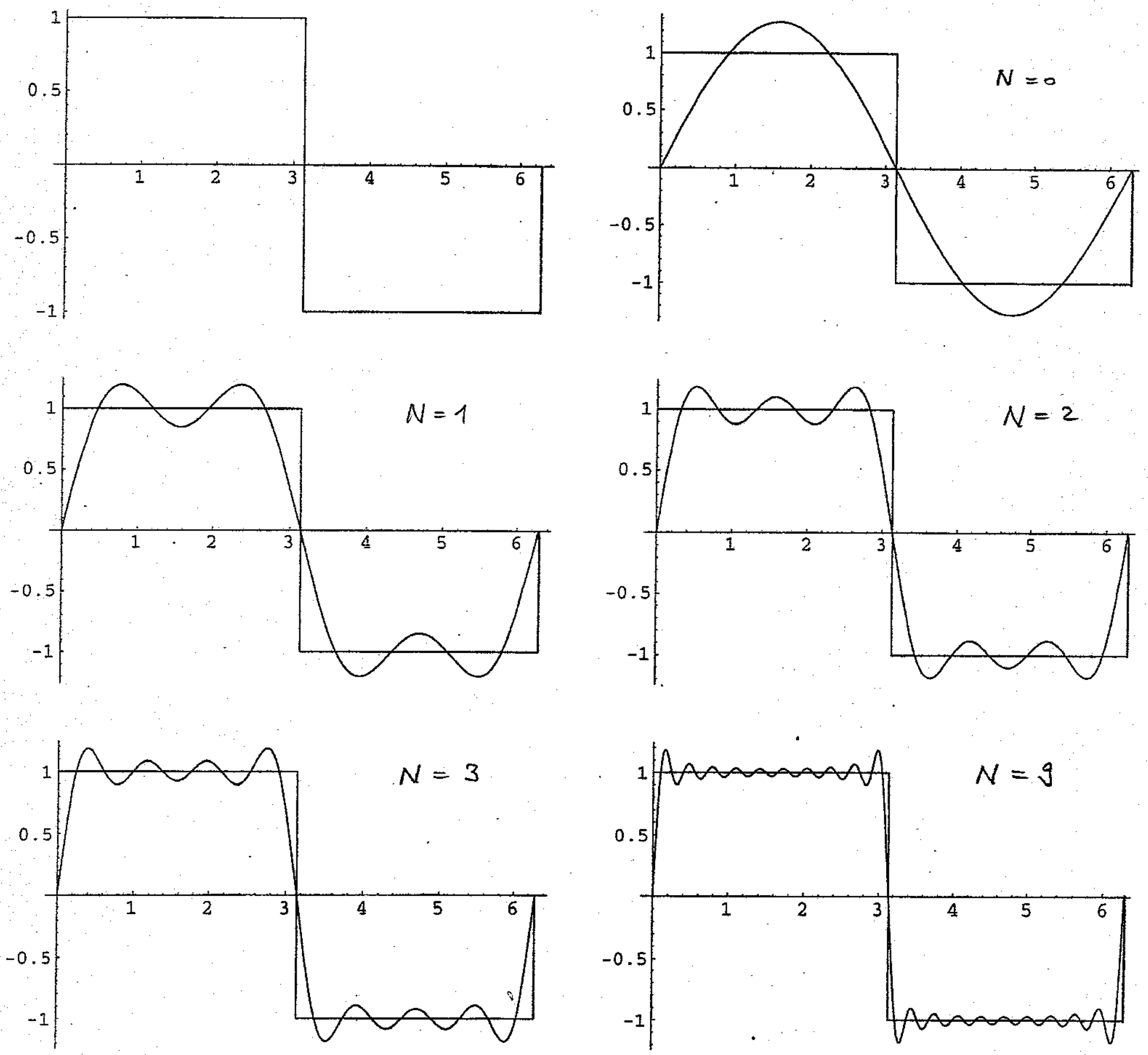
$$f(s) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(s) + \frac{1}{3} \sin(3s) + \frac{1}{5} \sin(5s) + \dots \right)$$



Die Addition der Oberwellen führt zu einer zunehmend besseren "Approximation" des Rechtecks!

- Überschwinger nahe den Sprungstellen
- 0 genau an den Sprungstellen
- <u>nicht</u> absolut konvergent!

Sukzessive Approximation des Rechtecksignals durch ihre partielle Fourier-Reihe $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$ für einige N



Allgemeiner: Die <u>komplexe</u> Form der Fourier-Reihe:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx}}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,\big(\cos(ns) - i\sin(ns)\big)\,ds = \frac{a_n - i b_n}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cdot e^{-ins}\,ds$$

Diese Form ist für viele Überlegungen von Vorteil!
Insbesondere ist:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ins}\, e^{+ims}\,ds = \overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)s}\,ds}^{\overset{n\neq m}{=} \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{e^{-i(n-m)s}}{(m-n)}\Big|_{-\pi}^{\pi}} = \delta_{n,m}$$

Dies sieht wie ein <u>Skalarprodukt</u> aus!
In der Tat

Betrachte $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ (s. u.) mit

$$\langle f \mid g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(s)}\cdot g(s)\,ds \;.$$

Dann ist

$$c_n = \langle n \mid f\rangle = \langle e^{ins} \mid f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ins}\cdot f(s)\,ds$$

Und (formal):

$$|f\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n\rangle\langle n|f\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\cdot |n\rangle$$

wobei gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}.$$

Was bedeutet das?

$$\langle n | m \rangle = \delta_{n,m}$$

$$| f \rangle = \sum_n c_n \cdot | n \rangle \qquad \circledast$$

$$\Rightarrow \langle m | f \rangle = \langle m | \sum_n c_n | n \rangle$$

$$= \sum_n c_n \langle m | n \rangle = c_m$$

<u>Wenn</u> (!) sich also jedes $|f\rangle$ in der Form $\circledast$ schreiben lässt, so muss gelten:

$$| f \rangle = \sum_n c_n | n \rangle = \sum_n \langle n | f \rangle \cdot | n \rangle$$

$$= \underbrace{\sum_n | n \rangle \cdot \langle n |}_{= Id} f \rangle$$

Dabei ist $|n\rangle\langle n|$ der <u>Projektor</u> auf die Richtung von $|n\rangle$, also insbesondere:

$$\left(| n \rangle \langle n | \right)^2 = | n \rangle \underbrace{\langle n | n \rangle}_{=1} \langle n | = | n \rangle \langle n |$$

Deutung: $\quad |f\rangle$: Vektor

$\quad \langle g |$: Linearform

Satz: Jede 2π-periodische stetige Funktion f
lässt sich als konvergente Fourier-Reihe darstellen,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int},$$

mit $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\cdot f(t)\,dt$, wobei es sich um Konvergenz <u>im Mittel</u> handelt, also konv. bzgl. $\|.\| = \sqrt{\langle .|. \rangle}$. □

<u>Bem.:</u> • Punktw. Konv. muss <u>nicht</u> (überall) gelten

<u>Schönheitsfehler:</u> $(C^0_{per}[0,2\pi], \langle .|.\rangle)$ <u>nicht</u> vollst.

Allgemeiner:

<u>Satz:</u> Die Fourierreihe jeder L^2-Funktion f konvergiert im quadratischen Mittel gegen f.
Also ist stets

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ins} f(s)\,ds,$$

mit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \|f\|^2.$$

Zwei Funktionen mit denselben c_n stimmen f.ü. überein – sind also im Sinne der L^2-Theorie gleich! □

<u>Bem.:</u> Für $f \in L^2(S^1)$: Punktw. Konvergenz f.ü. ! (Satz von Carleson, 1966)

(Mehr hierzu: Heuser II, Kap. 143).

Approximation im Hilbertraum

(Ex.)

Sei $u_n(s) = e^{ins}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(s)}\, g(s)\, ds$.

Dann ist $u_n \perp u_m$ für $m \neq n$, und $\| u_n \| = 1$.

Ist nun $g(s) = \sum_{k=m}^{n} c_k \cdot u_k$, mit $c_k \in \mathbb{C}$,
so ist:

$$\| g \|^2 = \langle g | g \rangle = \langle \sum_{k=m}^{n} c_k u_k \,\Big|\, \sum_{\ell=m}^{n} c_\ell u_\ell \rangle$$

$$= \sum_{k,\ell=m}^{n} \bar{c}_k c_\ell \underbrace{\langle u_k | u_\ell \rangle}_{= \delta_{k,\ell}} = \sum_{k=m}^{n} | c_k |^2 .$$

Nun kommen wir zur <u>Gauß'schen</u> Approximationsaufgabe: Gegeben f und ein ONS (u. U. keine Basis) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Bestimme $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$\| f - \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell e_\ell \| \overset{!}{=} \text{minimal}.$$

$\curvearrowright$ <u>Bestapproximation!</u>

<u>Satz:</u> Die Gauß'sche A.A. wird eindeutig durch $\alpha_\ell = \langle e_\ell | f \rangle$ gelöst, und $f - \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell e_\ell$ steht <u>senkrecht</u> auf $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Dabei gilt:

$$\sum_{\ell=1}^{n} | \langle e_\ell | f \rangle |^2 \leq \| f \|^2 \qquad \text{(Bessel'sche Ungl.)}$$

<u>Bem.:</u> Gültig in jedem Innenproduktraum, keine Vollständigkeit erforderlich!

Bew.: $0 \leq \| f - \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell e_\ell \|^2 = \langle \dots | \dots \rangle$

$$= \langle f | f \rangle - \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \langle f | e_\ell \rangle$$

$$- \sum_{\ell=1}^{n} \bar{\alpha}_\ell \langle e_\ell | f \rangle + \sum_{\ell=1}^{n} |\alpha_\ell|^2 \qquad \text{(nachrechnen!)}$$

$$= \langle f | f \rangle + \sum_{\ell=1}^{n} \underbrace{|\langle e_\ell | f \rangle - \alpha_\ell|^2}_{\geq 0} - \sum_{\ell=1}^{n} |\langle e_\ell | f \rangle|^2$$

Dies wird minimal für $\alpha_\ell = \langle e_\ell | f \rangle$.
Dann bleibt übrig, was die Bessel'sche Ungl. liefert.

Ist $z = f - \sum_{\ell=1}^{n} \langle e_\ell | f \rangle e_\ell$, so ist außerdem

$$\langle e_m | z \rangle = \langle e_m | f \rangle - \sum_{\ell=1}^{n} \langle e_\ell | f \rangle \delta_{\ell m} = 0,$$

also $e_m \perp z$ für alle $1 \leq m \leq n$. $\square$

<u>Folgerung:</u> Es gilt die <u>Bessel'sche Gleichung:</u>

$$\| f - \sum_{\ell=1}^{n} \langle e_\ell | f \rangle e_\ell \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{\ell=1}^{n} |\langle e_\ell | f \rangle|^2.$$

$\square$

<u>Satz:</u> Sei $\{ e_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ ein ONS. Dann gilt:

(1) $\sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell e_\ell$ ist Cauchy $\Leftrightarrow$ $\sum_{\ell=1}^{\infty} |\alpha_\ell|^2$ konvergiert

(2) $f = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell e_\ell \Rightarrow \alpha_\ell = \langle e_\ell | f \rangle$, und es liegt unbedingte Konvergenz vor.

(3) $\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle e_\ell | f \rangle e_\ell = f \Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle e_\ell | f \rangle|^2 = \| f \|^2$

(<u>Parseval'sche Gleichung</u>)

Bew.:

(1) folgt unmittelbar aus der folgenden Rechnung (für $1 \le m \le n$):

$$\left\|\sum_{\ell=m}^{n} \alpha_\ell e_\ell\right\|^2 = \langle \ldots | \ldots \rangle = \sum_{k,\ell} \bar{\alpha}_k \alpha_\ell \underbrace{\langle e_k | e_\ell \rangle}_{=\delta_{k\ell}}$$
$$= \sum_{\ell=m}^{n} |\alpha_\ell|^2$$

(2) Sei $f_n := \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell e_\ell$, und $f_n \xrightarrow[\|.\|]{n\to\infty} f$.

Dann ist $|\langle e_k | f_n \rangle - \langle e_k | f \rangle|$

$$= |\langle e_k | f_n - f \rangle| \overset{C.S.}{\le} \|e_k\| \cdot \|f_n - f\| = \underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0}$$

Da aber $\langle e_k | f_n \rangle = \alpha_k$ für alle $n \ge k$ (vergl. Gauß-AA) folgt die Formel für den Koeffizienten (Bem.: Stetigkeit der Linearform $\langle e_k | . \rangle$).

(3) folgt nun sofort aus der Bessel'schen Gl.

Bleibt die "Umordnungsresistenz" unter (2):

$$f = \sum_{\ell \ge 1} \alpha_\ell e_\ell \Rightarrow f = \sum_{\ell\ge 1} \langle e_\ell | f \rangle e_\ell$$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} \sum_{\ell \ge 1} |\langle e_\ell | f \rangle|^2$ konv. absolut, also auch für eine bel. Umordnung der Terme.⊛ Erneut wegen (3) konvergiert aber $\sum_{\ell \ge 1} \langle e_\ell | f \rangle e_\ell$ trotz Umordnung stets gegen f.

□

⊛ ≙ Umnummerierung der Elemente des ONS