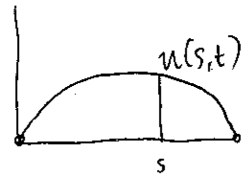
Randwertprobleme

Wiederholung:

eingespannte Saite



- $u_{tt} = \alpha^2 u_{ss} \quad (\alpha > 0) \quad$ (PDE)
- Separationsansatz:
  $u(s,t) = v(s) \cdot w(t)$

$u(s,t)$ löst die PDE $\longleftrightarrow$
- $[\, v'' + \lambda v = 0 \,]$
- $\ddot{w} + \alpha^2 \lambda w = 0$

$v'' + \lambda v = 0 \;, \quad v(0) = v(\pi) = 0 \quad]$ ⊛ : ein Randwertproblem! (RWP)

Lösungen von ⊛ sind von der Form

$$v_n(s) = C_2 \sin(ns), \quad \text{mit } \lambda_n = n^2$$

In diesem Kapitel:

- Existenz & Eindeutigkeit der Lösungen von RWP
- Die Greensche Funktion $\Gamma(x,\xi)$
- Das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem

RWP:

$$u^{(n)} = f(x, u, \ldots, u^{(n-1)}) + n \text{ Zusatzbedingungen}$$
$$(u^{(i)}(a), u^{(i)}(b))$$

Gesucht: Lösung im Intervall $J = [a,b]$

Wir beschränken wir auf den Fall $\underline{n=2}$.

$$u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = g(x) \quad , \quad a \le x \le b \qquad (\star)$$

(mögliche) Randbedingungen:

1. Art : $u(a) = \eta_1, \quad u(b) = \eta_2$
2. Art : $u'(a) = \eta_1, \quad u'(b) = \eta_2$

3. Art : $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta_1 \quad , \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \eta_2$

:= Sturmsche Randbed.

Periodische Randbed.: $u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b)$

Beispiel:

$u'' = 0$] Lösungen: lineare Funktionen!

RWP 1. Art : $u'' = 0, \quad \begin{array}{l} u(a) = \eta_1 \\ u(b) = \eta_2 \end{array}$] immer eindeutig lösbar!

RWP 2. Art : $u'' = 0, \quad \begin{array}{l} u'(a) = \eta_1 \\ u'(b) = \eta_2 \end{array}$] Steigung konstant

$\Rightarrow$ $\eta_1 \neq \eta_2$: keine Lösung

$\eta_1 = \eta_2$: unendlich viele Lösungen

Das Sturmsche RWP

$$\left.\begin{array}{l} Lu := (p(x)u')' + q(x)u = g(x) \quad \text{in } J = [a,b] \\ R_1 u := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) = \eta_1 \\ R_2 u := \beta_1 u(a) + \beta_2 p(b) u'(b) = \eta_2 \end{array}\right] \quad (\star\star)$$

Jede DGL $(\star)$ lässt sich in dieser Form schreiben (warum?).
Diese Form nennt man die selbstadjungierte Form von L.

Voraussetzung (S)
[
- $p \in C^1(J)$, $q, g \in C(J)$ (reelwertig)
- $p(x) > 0$ in J
- $\alpha_1^2 + \alpha_2 > 0, \ \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$

Das homogene RWP

$$Lu = 0\ , \quad R_1 u = R_2 u = 0$$

Lagrange-Identität: $vLu - uLv = (p(x)(u'v - v'u))'$

(für $u, v \in C^2(J)$)

$\Rightarrow \int_a^b (vLu - uLv)\,dx = 0$, falls u & v den hom. Randbed.

$R_i u = R_i v = 0 \quad (i = 1, 2)$

genügen

Folgt aus der Tatsache, dass $u'(a)v(a) - v'(a)u(a)$

$= u'(b)v(b) - v'(b)u(b) = 0$

$\ulcorner$ $\alpha_2 = 0 \Rightarrow u(a) = v(a) = 0$ (da $R_1 u = 0$)

$\alpha_2 \neq 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u'(a) = \delta u(a) \\ v'(a) = \delta v(a), \end{array}\right]$ da $R_1 u = R_1 v = 0$

wobei $\delta = -\alpha_1 / \alpha_2 p(a)$

(Analog gilt für $x = b$) $\lrcorner$

Nun seien: $u, u_1, u_2, \ldots$: Lösungen des hom. RWP

$v, v_1, v_2, \ldots$: Lösungen des inhom. RWP

- $\sum c_i u_i$: löst das hom. RWP
- $u + v$: löst das inhom. RWP
- $v_1 - v_2$: löst das hom. RWP

Alle Lösungen v ergeben sich in der Form

$$v = \underbrace{v^*}_{\text{fest}} + \underbrace{u}_{\text{bel. Lösung des hom. RWP}}$$

Satz: Es sei $\{u_1(x), u_2(x)\}$ ein FUSY der homogenen DGL $Lu = 0$. Das inhomogene RWP (**) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Insbesondere hat das homogene RWP in diesem Fall nur die triviale Lösung $u \equiv 0$.

Beweis:

Ist v^* eine spezielle Lösung von $Lu = g(x)$, so lautet die allgemeine Lösung dieser DGL:

$$v = v^* + c_1 u_1 + c_2 u_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Randbed.

$$\Rightarrow R_i v = R_i v^* + c_1 R_i u_1 + c_2 R_i u_2 = \eta_i$$

(genau eindeutig lösbar falls die im Satz angegeb. Det. nicht verschwindet !) $\square$

Bem.: Falls ein FUSY bekannt ist reduziert sich die Lösung eines lin. RWP auf die Lösung eines lin. Gleichungssystems.

Beispiel:

ⓐ $u'' + u = g(x), \quad 0 \le x \le \pi$

$$R_1 u = u(0) + u'(0) = \eta_1$$
$$R_2 u = u(\pi) \qquad\qquad = \eta_2$$

Jedes solche RWP [bei bel. $\eta_1, \eta_2, g(x)$] ist eindeutig lösbar, da für das FUSY $u_1(x) = \cos(x)$, $u_2(x) = \sin(x)$:

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} R_1(\cos(x)) & R_1(\sin(x)) \\ R_2(\cos(x)) & R_2(\sin(x)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

(b) Setzt man in (a) speziell $g(x)=1$, so ist $v^*=1$ eine spezielle Lösung und

$$v(x) = 1 + c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$$

Sei $\eta_1=\eta_2=0$ vorgegeben [halbhomogenes RWP]

$$\left.\begin{aligned} R_1v &= 1+c_2+c_1 = 0 \\ R_2v &= 1-c_1 \quad = 0 \end{aligned}\right] \Rightarrow c_1=1,\ c_2=-2$$

Lösung des RWP : $\boxed{v(x) = 1+\cos(x)-2\sin(x)}$

(c) Betrachten wir folgende Randbed.

$R_1u = u(0) = \eta_1$
$R_2u = u(\pi) = \eta_2$

$$\begin{vmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Das homogene RWP hat <u>unendlich viele</u> Lösungen

$(u = c\sin(x))$,

während z.B.

$u''+u'=0$, $u(0)=0$, $u(\pi)=1$

<u>Keine Lösung</u> besitzt.

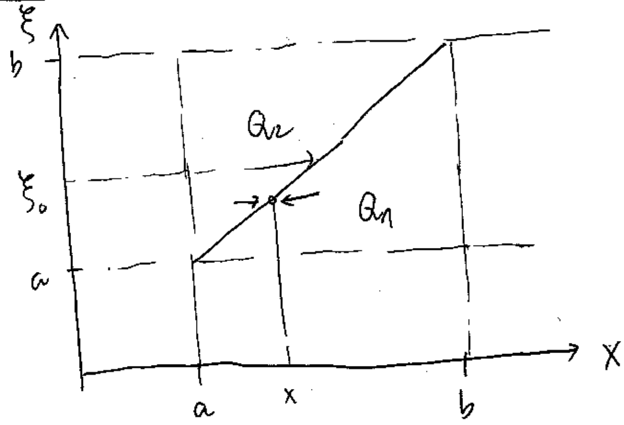
Grundlösungen & die Greensche Funktion

Sei $J = [a,b]$

$Q: \{(x,\xi) : a \leq x, \xi \leq b\}$

$Q_1: \{(x,\xi) : a \leq \xi \leq x \leq b\}$

$Q_2: \{(x,\xi) : a \leq x \leq \xi \leq b\}$



Definition (Grundlösung)

Die Funktion $\gamma(x,\xi)$ heißt Grundlösung der homogenen DGL $Lu = 0$, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat ($p > 0$ vorausgesetzt)

(a) $\gamma(x,\xi)$ ist stetig in Q

(b) In Q_1 & Q_2 existieren die partiellen Ableitungen γ_x, γ_{xx} und sind stetig [auf der Diagonale: einseitige Ableitung]

(c) Bei festem $\xi_0 \in J$ ist $\gamma(x,\xi_0)$ eine Lösung von $L\gamma = 0$, für $x \neq \xi_0$, $x \in J$

(d) Auf der Diagonale $x = \xi$ macht γ_x einen "Sprung":

$$\underbrace{\gamma_x(x+0,x)}_{\text{rechtsseitige Ableitung}} - \underbrace{\gamma_x(x-0,x)}_{\text{linksseitige Ableitung}} = \frac{1}{p(x)} \quad (a < x < b)$$

Unter der Voraussetzung (S) existiert immer eine Grundlösung (jedoch nicht immer eindeutig)

Sei $u(x,\xi)$ die Lösung des AWP [ξ fest!]

$$Lu=0\,, \quad u(\xi)=0\,, \quad u'(\xi)=\frac{1}{p(\xi)}$$

so wird durch

$$\gamma(x,\xi)=\begin{cases} 0 & \text{in } Q_2 \\ u(x,\xi) & \text{in } Q_1 \end{cases}$$

eine Grundlösung definiert.

Beispiele: Hier sei $a_+ := \max(0,a)$

(1) $u''=0 \Rightarrow \gamma(x,\xi)=(x-\xi)_+$

(2) $u''+\lambda^2 u=0 \Rightarrow \gamma(x,\xi)=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda(x-\xi)_+$ $[0\neq\lambda\in\mathbb{R}]$

<u>Satz</u>: [Grundlösungen & Lösung der inhom. DGL $Lv=g(x)$]

Es gelte die Voraussetzung (S). Ist $\gamma(x,\xi)$ eine Grundlösung, so ist die Funktion

$$v(x)=\int_a^b \gamma(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi$$

aus der Klasse $C^2(J)$ & sie stellt eine Lösung der inhom. DGL

$$Lv=g(x)$$

dar.

<u>Beweis</u>:

$$v(x)=\int_a^x \gamma(x,\xi)g(\xi)\,d\xi+\int_x^b \gamma(x,\xi)g(\xi)\,d\xi$$

$$v'(x)=\gamma(x,x)\,g(x)+\int_a^x \gamma_x(x,\xi)g(\xi)\,d\xi$$
$$-\gamma(x,x)\,g(x)+\int_x^b \gamma_x(x,\xi)g(\xi)\,d\xi=\int_a^b \gamma_x(x,\xi)g(\xi)\,d\xi$$

$$v''(x) = \gamma_x(x+0,x)\,g(x) + \int_a^x \gamma_{xx}(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi$$
$$- \gamma_x(x-0,x)\,g(x) + \int_x^b \gamma_{xx}(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi$$

$$\overset{(d)}{=} \int_a^b \gamma_{xx}(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi + \frac{g(x)}{p(x)}$$

Nun ist

$$Lv = pv'' + p'v' + qv$$
$$= \underbrace{\int_a^b \left[p\,\gamma_{xx}(x,\xi) + p'\,\gamma_x(x,\xi) + q\,\gamma(x,\xi)\right] g(\xi)\,d\xi}_{\int_a^b L\gamma(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi \overset{(c)}{=} 0} + g(x)$$

$$= g(x). \qquad \square$$

Die Greensche Funktion

Wir betrachten das Sturmsche RWP

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

$\Gamma(x,\xi)$ ist die Greensche Funktion für $(*)$ falls

1. $\Gamma(x,\xi)$ eine Grundlösung ist
2. $R_1\Gamma = R_1\Gamma = 0$ für jedes $\xi \in (a,b)$

<u>Ansatz</u>: u_1, u_2 : FUSY der DGL $Lu = 0$

$$\Gamma(x,\xi) = \sum_{i=1}^{2} \left(a_i(\xi) \pm b_i(\xi)\right) u_i(x) \qquad \begin{cases} + & \text{in } Q_1 \\ - & \text{in } Q_2 \end{cases}$$

Γ stetig + Sprungrelation von Γ_x

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{2} b_i(\xi) u_i(\xi) = 0 \\ \sum_{i=1}^{2} b_i(\xi) u_i'(\xi) = \frac{1}{2p(\xi)} \end{array}\right] \quad \text{immer eindeutig lösbar, da die Wronski-Det.} \neq 0$$

Zur Bestimmung der $a_i(\xi)$ kommen die Randbed. ins Spiel:

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} R_1\Gamma = \sum_{i=1}^{2} (a_i(\xi) - b_i(\xi)) R_1 u_i = 0 \\ R_2\Gamma = \sum_{i=1}^{2} (a_i(\xi) + b_i(\xi)) R_2 u_i = 0 \end{array}\right] \quad \text{eindeutig lösbar, wenn } \begin{vmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

<u>Satz</u>: Unter der Voraussetzung (S) existiert genau eine Greensche Funktion $\Gamma(x,\xi)$ für das Sturmsche RWP, wenn diese nur die triviale Lösung besitzt.

Außerdem ist sie symmetrisch ($\Gamma(x,\xi) = \Gamma(\xi,x)$) und lässt sich aus obigem Ansatz berechnen.

Die eindeutige Lösung des halbhom. RWP

$$Lv = g(x), \quad R_1 v = R_2 v = 0 \quad \text{mit } g \in C(J)$$

lautet

$$v(x) = \int_a^b \Gamma(x,\xi)\, g(\xi)\, d\xi .$$

<u>Beweis</u>:

- $Lv = g(x)$ [da $\Gamma(x,\xi)$ Grundlösung]
- $R_1 v = R_2 v = 0$ [wegen $R_1\Gamma = R_2\Gamma = 0$]

Noch z.z.: $\Gamma(x,\xi)$ ist symmetrisch & eindeutig

Seien Γ_1, Γ_2 Greensche Funktionen & $g, h \in C(J)$.

Betrachte

$$v(x) = \int_a^b \Gamma_1(x,\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$
$$w(x) = \int_a^b \Gamma_2(x,\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

Für v & w gilt:

$$\int_a^b (vLw - wLv)\, dx = 0 \quad \left[\begin{matrix}\text{wegen} \\ R_i v = R_i w = 0\end{matrix}\right]$$

$+ \; Lw = h, \; Lv = g$

$$\Longrightarrow \int_a^b \int_a^b h(x)\, \Gamma_1(x,\xi)\, g(\xi)\, d\xi\, dx = \int_a^b \int_a^b g(x)\, \Gamma_2(x,\xi)\, h(\xi)\, d\xi\, dx$$

x & ξ beim 2. Integral vertauschen

$$\Longrightarrow \iint_Q \left(\Gamma_1(x,\xi) - \Gamma_2(\xi,x)\right) g(\xi)\, h(x)\, d\xi\, dx = 0$$

Dies kann nur bei beliebiger Wahl von g & h gelten wenn

$$\Gamma_1(x,\xi) = \Gamma_2(\xi,x).$$

Setze $\Gamma_1 = \Gamma_2 \Longrightarrow \Gamma_1$ ist symmetrisch

Schließlich ergibt sich auch die Eindeutigkeit von Γ. $\square$