
Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Präsenzübung

(1) Betrachten Sie das RWP

$$u'' = -x^2, \text{ mit } R_1 u = u(0) = 0 \text{ und } R_2 u = u(1) = 0.$$

- (a) Berechnen Sie die Greensche Funktion für das homogene RWP.
- (b) Lösen Sie das halbhomogene RWP (i) mit Hilfe der Greenschen Funktion und (ii) durch zweimalige Integration und Anpassung der freien Konstanten.

$$\begin{cases} u'' = 0 \\ R_1 u = u(0) = 0 \\ R_2 u = u(1) = 0 \end{cases}$$

• $p(x) \equiv 1$, FUSY: $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$

Ansatz: $r(x, \xi) = \sum_{i=1}^2 (a_i(\xi) \pm b_i(\xi)) u_i(x) \begin{cases} + & \text{in } Q_1 \\ - & \text{in } Q_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} b_1(\xi) + b_2(\xi)\xi = 0 \\ b_1(\xi)0 + b_2(\xi)1 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} b_2(\xi) &= 1/2, & b_1(\xi) &= -\xi b_2(\xi) \\ & & &= -1/2\xi \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (a_1(\xi) - b_1(\xi)) \cdot 1 + (a_2(\xi) - b_2(\xi)) \cdot 0 = 0 \\ (a_1(\xi) + b_1(\xi)) \cdot 1 + (a_2(\xi) + b_2(\xi)) \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a_1(\xi) &= b_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi \\ a_2(\xi) &= b_2(\xi) = 1/2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_2(\xi) = (\xi - 1/2)$$

$$r(x, \xi) = \begin{cases} -\xi + \xi(x) & \text{in } Q_1 \\ 0 + (\xi - 1)x & \text{in } Q_2 \end{cases} = \begin{cases} \xi(x - 1) & \text{in } Q_1 \\ x(\xi - 1) & \text{in } Q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'' = -x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ R_1 u = u(0) = 0 \\ R_2 u = u(1) = 0 \end{cases}$$

$$P(x, \xi) = \begin{cases} \xi(x-1) & \text{in } Q_1 \\ x(\xi-1) & \text{in } Q_2 \end{cases}, \quad g(x) = -x^2$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_0^1 P(x, \xi) g(\xi) d\xi \\ &= \int_0^x \xi(x-1)(-\xi)^2 d\xi + \int_x^1 x(\xi-1)(-\xi)^2 d\xi \\ &= (x-1) \int_0^x (-\xi^3) d\xi + x \int_x^1 -(\xi^3 - \xi^2) d\xi \\ &= (x-1) \left(-\frac{\xi^4}{4} \right) + x \left[-\frac{\xi^4}{4} + \frac{\xi^3}{3} \right] \Big|_x^1 \\ &= -\frac{\cancel{x^5}}{4} + \frac{x^4}{4} + \frac{\cancel{x^5}}{4} - \frac{x^4}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{3} \\ &= -\frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{12} x \end{aligned}$$

$$u'' = -x^2$$

$$\Rightarrow u'(x) = -\frac{x^3}{3} + C_1$$

$$u(x) = -\frac{x^4}{12} + C_1 x$$

$$u(0) = 0 \quad \checkmark$$

$$u(1) = -\frac{1}{12} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{12}$$

Bemerkung:

Lösung des inhomogenen RWP:

$$\begin{cases} Lu = g \\ R_i u = \eta_i \quad (i=1,2) \end{cases}$$

Ansatz: $\phi \in C^2(J)$ mit $R_i \phi = \eta_i \quad (i=1,2)$

Jetzt betrachte $u := \phi + v$

$$\Rightarrow \begin{cases} Lu = L\phi + Lv = g \\ R_i u = R_i \phi + R_i v = \eta_i \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{\begin{cases} Lv = h \quad \text{mit } h = g - L\phi \\ R_1 v = R_2 v = 0 \end{cases}}_{\text{halbhomogenes RWP!}}$$

Beispiel:

$$\begin{cases} u'' = -x^2 \\ R_1 u = u(0) = 2, \quad R_2 u = u(1) = 3 \end{cases}$$

$$\phi(x) = x + 2, \quad L\phi = 0$$

$$\Rightarrow u = \phi + v = (x+2) + \left(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12}x\right) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{13}{12}x + 2$$

Allgemeine lineare RWP

lineare Systeme 1. Ordnung:

$$Ly = f(x) \quad \text{in } J = [a,b], \quad Ry = \eta \quad] \quad (*)$$

mit

$$Ly := y' - A(x)y, \quad Ry = Cy(a) + Dy(b)$$

A, C, D : $(n \times n)$ -Matrizen

y, f, η : Vektoren

A, f in J stetig

C, D, η : konstant

Beispiele

(1) $C = \mathbb{1}$, $D = 0 \Rightarrow \text{AWP!}$

(2) $n=2$, Sturmsche RWP:

$$y(x) = \begin{pmatrix} u \\ p(x)u' \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1/p \\ -q & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

Satz Es sei $Y(x) = (y_1, \dots, y_n)$ ein FUSY von Lösungen der DGL $Ly = 0$, wobei $A(x)$ komplexwertig und in J stetig ist. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- (a) Die homogene Aufgabe $Ly = 0$, $Ry = 0$ hat nur die triviale Lösung $y \equiv 0$.
- (b) Für die Matrix $R(Y) = CY(a) + DY(b)$ gilt $\det R(Y) \neq 0$.
- (c) Zu vorgegebenem $f \in C(J)$, $\eta \in \mathbb{C}^n$ hat das RWP $\otimes$ genau eine Lösung.

Beweis: Übung!

(Matrix-wertige) Greensche Funktion

$$C_R^1 := \{ y \in C^1(J), Ry = 0 \}$$

$$Ly = f, Ry = 0 \Rightarrow \text{Gesucht: } y \in C_R^1 \text{ mit } Ly = f$$

Voraussetzung: $\det(R(Y)) \neq 0 \Rightarrow \exists$ genau eine Lösung!

$$\Rightarrow L: C_R^1 \rightarrow C(J) \text{ inj.} \Rightarrow \text{Umkehrabbildung: } L^{-1} = G: C^0(J) \rightarrow C_R^1$$

$$y = L^{-1}f: \text{Lösung des halbhom. RWP}$$

Gesucht: Integraldarstellung von $G \longleftrightarrow (n \times n)$ -Matrix $\Gamma(x, \xi)$ mit

$$y(x) = (Gf)(x) = \int_a^b \underbrace{\Gamma(x, \xi)}_{\text{Greensche Matrix}} f(\xi) d\xi$$

$\uparrow$
 der Greensche Operator

Bem: $z(x) = \int_a^x Y(x) Y^{-1}(\xi) f(\xi) d\xi$ ist eine Lösung von $Lz = f$

(vgl. mit dem matrixwertigen AWP)

Diese Funktion erfüllt:

$$R(z) = \underbrace{Cz(a)}_{=0} + Dz(b) = D \int_a^b Y(b) Y^{-1}(\xi) f(\xi) d\xi$$

$$\text{Nun gilt } Ry = 0 \longleftrightarrow R(z) + R(Y)c = 0 \longleftrightarrow c = -R(Y)^{-1}R(z)$$

$$\Rightarrow y = z(x) - Y(x) R(Y)^{-1} R(z)$$

$$y = \int_a^x Y(x) Y^{-1}(\xi) f(\xi) d\xi - Y(x) R(Y)^{-1} D \int_a^b Y(b) Y^{-1}(\xi) f(\xi) d\xi$$

$$= \int_a^b \underbrace{Y(x) (c(x, \xi) - R(Y)^{-1} D Y(b)) Y^{-1}(\xi)}_{:= \Gamma(x, \xi)} f(\xi) d\xi, \text{ mit } c(x, \xi) = \begin{cases} 1, & \xi \leq x \\ 0, & \xi > x \end{cases}$$

(xx)

Satz: Es sei $A(x)$ in J stetig, $Y(x)$ ein FWS & es gelte $\det(R(Y)) \neq 0$. Dann existiert zum RWP $Ly = f, Ry = 0$ genau eine Greensche Funktion $\Gamma(x, \xi)$ & ist durch (xx) gegeben.