Wiederholung:

$$\phi(x,\lambda) = \arctan(u/pu') \qquad \begin{array}{l} (pu')' + (q+\lambda r)u = 0 \\ \left[\begin{array}{l} u(a) = \sin\alpha \\ p(a)u'(a) = \cos\alpha, \text{ mit } 0 \le \alpha < \pi \end{array} \right] \circledast \end{array}$$

> stetig in (x,λ)

> genügt der DGL

$$\phi' = \frac{1}{p} + \left(q - \frac{1}{p} + \lambda r\right)\sin^2\phi \quad \text{mit } \phi(a,\lambda) = \alpha$$

> <u>Eigenschaften</u>:

(a) $\phi_\lambda(x,\lambda) > 0$ für $a < x \le b$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(b) $\phi(b,\lambda) \to 0$ für $\lambda \to -\infty$

(c) Es gibt positive Konstanten δ, D, λ_0 mit

$$\delta\sqrt{\lambda} \le \phi(b,\lambda) \le D\sqrt{\lambda} \quad \text{für } \lambda \ge 0$$

(d) $\phi(x_0,\lambda_0) = k\pi \Rightarrow \phi'(x_0,\lambda_0) > 0$

$\Rightarrow$ In der (x,y)-Ebene schneidet $y = \phi(x,\lambda_0)$ die Gerade $y = k\pi$ höchstens <u>einmal</u>. Insbesondere folgt $\phi(x,\lambda) > 0$ für $a < x \le b$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zurück zu der Eigenwertaufgabe

$$R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a)u'(a) = 0$$

Deutung: $(\alpha_1, \alpha_2) \perp (u(a), p(a)u'(a))$

$\Rightarrow$ Es gibt genau eine Zahl α mit $\alpha_1 \sin\alpha + \alpha_2\cos\alpha = 0 \quad (0 \le \alpha < \pi)$

nämlich $\alpha = \arctan\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \frac{\pi}{2}$ $\left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \text{ für } \alpha_2 = 0, \\ \text{sonst Hauptwert von arctan} \end{array}\right]$

- Ist $u(x,\lambda)$ Lösung des AWP $\circledast$ mit diesem α, so ist $R_1 u = 0$
- Jede Lösung von $\circledast$ ist ein Vielfaches von u.

Analog gilt für R_2:

$R_2 u = 0 \iff (\beta_2, \beta_1) \perp (p(b)u'(b), u(b))$

$$\beta_1 \sin\beta + \beta_2 \cos\beta = 0 \qquad 0 < \beta \leq \pi$$

(Für $\beta_2 = 0$ ist $\beta = \pi$ zu nehmen)

- Die Lösung $u(x,\lambda)$ des AWP ⊛ hat die Eigenschaft $R_2 u = 0$ g.d.w. $\phi(b,\lambda) = \beta + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

  $\phi(b,\lambda)$ ist streng monoton wachsend : nach (a)
  (mit dem Wertebereich $(0,\infty)$) : nach (d)

  $\Rightarrow$ zu jedem $n \geq 0$ gibt es genau ein $\lambda = \lambda_n$ mit

$$\phi(b,\lambda_n) = \beta + n\pi \, , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

  (für $n < 0$ existiert kein solches λ)

  - λ_n : gesuchte Eigenwerte
  - $u_n(x) := u(x,\lambda_n)$: zugehörige Eigenfunktionen

Nach (c): $\delta^2 \lambda_n \leq (\beta + \pi n)^2 \leq D^2 \lambda_n$

$\Rightarrow$

Asymptotisches Verhalten:

Es gibt zwei positive Konstanten c, C mit

$$cn^2 \leq \lambda_n \leq Cn^2 \quad \text{für große } n.$$

---

u_n hat genau n Nullstellen in (a,b) (folgt aus (d)):

$u_n(x) = 0 \longleftrightarrow \phi_n(x) := \phi(x,\lambda_n) = k\pi$

$$0 \leq \phi_n(a) = \alpha < \pi \quad \& \quad n\pi < \phi_n(b) = \beta + n\pi \leq (n+1)\pi$$

$\phi_n(x)$ nimmt den Wert $k\pi$ für $k = 1,\ldots,n$ genau einmal an.

Satz (Vergleichssatz)

Es sei J ein beliebiges Intervall, $0 < p(x) \in C^1(J)$, $q(x) \in C(J)$, $u, v \in C^2(J)$ & L der Sturm-Liouville Operator.

Sind $x_0, x_1 \in J$ zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von v (also $v \neq 0$ in (x_0, x_1)) und ist

$$\frac{Lu}{u} \leq \frac{Lv}{v}$$

in den Punkten aus (x_0, x_1) mit $u(x) \neq 0$, so liegt genau einer der beiden folgenden Fälle vor.

(a) $u = cv$

(b) u hat eine Nullstelle in (x_0, x_1)

Bew:

Ang.: Fall (b) liegt nicht vor $\Rightarrow$ $u \neq 0$, $v \neq 0$ in $J_0 := (x_0, x_1)$

oBdA, $u > 0$, $v > 0$ in J_0

$$\Rightarrow \quad 0 \leq uLv - vLu = (pW)' \quad \text{mit } W = uv' - vu'$$

(nach der Lagrange-Id.)

Nun ist $W(x_0) \geq 0$ $\quad (v(x_0) = 0,\ v'(x_0) \geq 0)$

und $W(x_1) \leq 0$

$p(x)W(x)$ monoton wachsend $\Rightarrow$ $W(x) \equiv 0$!

$$\Rightarrow \left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{1}{u^2} W \equiv 0 \Rightarrow \frac{v}{u} \text{ konstant} \Rightarrow u = cv.$$

$\square$

Folgerungen

(1) Eine nichttriviale Lösung u von $Lu=0$ hat nur einfache Nullstellen, und zwar endlich oder abzählbar viele.
Im zweiten Fall haben die Nullstellen keinen Häufungspunkt in J.

Bew:
AWP: $Lu=0$ mit $u(x_0)=u'(x_0)=0$ besitzt eine eindeutige Lösung, und zwar $u\equiv 0$.

- $u(x_K)=0$ für $K\in\mathbb{N}$, $x_K\to\xi\in J \Rightarrow u(\xi)=0$ (wegen Stetigkeit)
- $u'(\xi)=\lim\limits_{K\to\infty}\dfrac{u(x_K)-u(\xi)}{x_K-\xi}=0$

$\Rightarrow u\equiv 0$.

Def: (Trennungseigenschaft)
Die Nullstellen von u & v trennen sich gegenseitig, falls zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von u eine Nullstelle von v liegt und umgekehrt.

Satz (Trennungssatz von Sturm)
(a) Sind u_1, u_2 zwei linear unabhängige Lösungen von $Lu=0$, so trennen sich ihre Nullstellen gegenseitig.
(b) Ist u eine Lösung von $Lu=(pu')'+qu=0$, v eine nichttriviale Lösung von

$$L_0v=(pv')'+q_0v=0 \quad \text{mit } q_0(x)\le q(x),$$

so liegt zwischen zwei Nullstellen von v eine Nullstellen von u.

Beweis:
(a) folgt direkt aus dem Vergleichssatz,
sowohl (b), da $Lu/u=0$ & $Lv/v=q-q_0\ge 0$.

Bemerkung:

Betrachte eine Lösung $u(x,\lambda)$ des SL-Eigenwertproblems. Es folgt aus (b), dass zwischen zwei Nullstellen von $u(x,\lambda)$ eine Nullstelle von $u(x,\lambda')$ liegt, wenn $\lambda < \lambda'$ ist.

Oszillation

Definition: Eine Lösung von $Lu=0$ oszilliert (oder hat oszillatorisches Verhalten) in J, wenn u abzählbar viele Nullstellen hat.

→ Nur möglich, wenn J nicht kompakt ist (warum?)

In diesem Fall nennt man auch die DGL $Lu=0$ oszillatorisch.
(Nach dem Trennungssatz oszilliert jede nichttriviale Lösung wenn eine Lösung oszilliert!)

Beispiele:

(a) Betrachte die DGL im Teil (b) des Trennungssatzes.
Ist $L_0 u=0$ oszillatorisch, so ist auch $Lu=0$ oszillatorisch.

(b) Die Besselsche DGL: $x^2u''+xu'+(x^2-\alpha^2)u=0$ ist in $(0,\infty)$ für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ oszillatorisch. (Übung)

Satz (Oszillationssatz)

In der Differentialgleichung $u''+q(x)u=0$ sei $q(x)$ stetig für $x\geq a$ und genüge einer der beiden Bedingungen

(a) $q(x)\geq 0$ & $\int_a^\infty q(x)\,dx=\infty$

(b) $\int_a^\infty |q(x)-\alpha|\,dx<\infty$ mit $\alpha>0$.

Dann ist die DGL oszillatorisch. Im Fall (b) ist außerdem jede Lösung beschränkt.