Ergänzung: Floquet-Theorie

Betrachte

$$\left.\begin{array}{l} u'' + a(x)u' + b(x)u = 0, \quad \text{mit} \\ a(x) \text{ \& } b(x) \ \omega\text{-periodisch (für dasselbe } \omega > 0) \end{array}\right] \ (*)$$

(d.h., $a(x+\omega) = a(x)$, $b(x+\omega) = b(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$)

Q: Wie sehen die Lösungen von $(*)$ aus? Sind die auch ω-periodisch?

Vorüberlegung:

- $y' + (1+\sin(x))y = 0 \implies y(x) = Ce^{-x}e^{\cos(x)}$
  [nur periodisch für $C=0$]
- $y'' + y = 0 \implies y(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$
  $a(x) = 0$ & $b(x) = 1$ beide (trivialerweise) ω-periodisch $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$
  aber $y(x)$ ist nur π-periodisch, wenn $C_1 = C_2 = 0$.

Homogene Systeme mit periodischen Koeffizienten

Betrachte

$$\left. y' = A(t)y \quad \text{mit} \quad A(t+\omega) = A(t) \right] \ (**)$$

Wir betrachten hier Lösungen von $(**)$

(a) $y(t)$: Lösung $\implies z(t) = y(t+\omega)$ auch eine Lösung

(b) $y(t)$ Lösung, $y(\omega) = \lambda y(0)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$)
$\implies y(t+\omega) = \lambda y(t)$ & $y(t+k\omega) = \lambda^k y(t) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

Es sei $X(t)$: FuSy , $X(0) = \mathbb{I}$

$\Rightarrow$ $Z(t) = X(t+\omega)$: auch ein FuSy

$\Rightarrow$ $X(t+\omega) = X(t)C$, mit $\underbrace{C = X(\omega)}_{\text{Übergangsmatrix !}}$, $\det(C) \neq 0$

Eigenwerte von C : $\sigma(C) = \{\lambda_i\}$, λ_i : Floquet - Multiplikatoren

- $\lambda_i \neq 0$
- $\exists \, \mu_i \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_i = e^{\omega \mu_i}$ (eindeutig bis auf Vielfache von $\frac{2\pi i}{\omega}$) bestimmt

  $Re(\mu_i)$ ist aber eindeutig festgelegt

  μ_i : charakteristische Exponenten

Jede Lösung lässt sich schreiben als :

$y(t) = X(t) y(0)$

$\Rightarrow y(\omega) = C y(0)$

Daraus folgt : $y(\omega) = \lambda y(0) \longleftrightarrow Cy(0) = \lambda y(0)$

Satz

① $\exists$ nichttriviale Lösungen mit $y(t+\omega) = \lambda y(t)$
$\longleftrightarrow \lambda \in \sigma(C)$.
Jede solche Lösung ist von der Form $y = X(t) c_\lambda$
c_λ : Eigenvektor von C zu λ.

Ist die Matrix C halbeinfach, erhält man auf diese Weise ein Hauptsystem von Lösungen.

② $\exists$ nichttriviale <u>ω-periodische</u> Lösungen
$\longleftrightarrow$ $\lambda = 1 \in \sigma(C)$.

$\exists$ periodische Lösungen mit der minimalen Periode $k\omega > 0$ $(k \in \mathbb{N})$
$\longleftrightarrow$ $\exists\, \zeta_k \in \sigma(C)$, ζ_k: primitive k-te Einheitswurzel

Fakt: Es sei $C \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ (bzw. $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$) mit $\det(C) \neq 0$, und sei $\omega > 0$. Dann existiert B mit $C = e^{\omega B}$.

<u>Satz von Floquet</u>:

Das FUSY $X(t)$ besitzt eine <u>Floquet-Darstellung</u>:

$$X(t) = Q(t) e^{Bt},$$

wobei

- $Q(t) \in C^1(\mathbb{R})$, ω-periodisch
- B die Matrix die $C = X(\omega) = e^{\omega B}$ erfüllt.

offenbar gilt $Q(0) = \mathbb{1}$ & $\det(Q(t)) \neq 0$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis</u>:

Definiere: $Q(t) := X(t) e^{-Bt}$

$\Rightarrow$ $X(t+\omega) = Q(t) e^{B(t+\omega)}$

Anderseits: $X(t+\omega) = X(t) C = Q(t) e^{Bt} C = Q(t) e^{B(t+\omega)}$

$\Rightarrow$ $Q(t) = Q(t+\omega)$.

<u>Bem.</u>: Aus der Jordanschen Normalform V der Matrix $\mathcal{U}$ erhält man die Jordansche Normalform von $e^{\mathcal{U}}$ (Diagonalglieder λ_i von V $\rightsquigarrow$ durch e^{λ_i} ersetzen).

Ein Eigenwert λ von $\mathcal{U}$ hat dieselbe <u>alg.</u> & <u>geom.</u> Vielfachheit und dieselben Eigenvektoren wie der zug. Eigenwert e^{λ} von $e^{\mathcal{U}}$.

Folgerungen:

① Sei $\mathfrak{U} = \omega B$.

μ_i : Eigenwert von B $\Rightarrow$ $\omega\mu_i$: Eigenwert von $\mathfrak{U}$ $\Rightarrow$ $\lambda_i = e^{\omega\mu_i}$: Eigenwert von $C = e^{\omega B}$

d.h., die Eigenwerte von B sind die charakteristische Exponenten.

② Sei D mit $\det(D) \neq 0$.

$$\underbrace{X(t)D}_{\text{FuSy von } (**)} = Q(t)\underbrace{e^{Bt}D}$$

(FuSy/Hauptsystem) der DGL $z' = Bz$, mit Anfangswert D bei $t=0$

$\Rightarrow$ Aus einem Hauptsystem $Z(t)$ von $z' = Bz$ erhält man ein Hauptsystem $Y(t) = Q(t)Z(t)$ von (**).

③ Einem EW $\lambda = e^{\omega\mu}$ von C entspricht ein EW μ von B mit gleicher algebraischer Vielfachheit k.

Dazu gibt es k linear unabh. Lösungen

$$y = Q(t)\underbrace{p_m(t)}_{\text{Vektorpolynom vom Grad } \leq m} e^{\mu t} \qquad (m = 0, 1, .., k-1)$$

$$q_m(t) = Q(t)p_m(t) = \underline{c_0(t)} + \underline{c_1(t)}t + \cdots + \underline{c_m(t)}t^m$$

c_j : ω-periodisch!

$\Rightarrow$ führt auf ein FuSy von (**)

Stabilität: Die Nulllösung $y(x) \equiv 0$ der DGL (**) ist

- asymptotisch stabil : wenn $|\lambda| < 1$ für alle $\lambda \in \sigma(C)$ gilt
- stabil : wenn $|\lambda| \leq 1$ für alle $\lambda \in \sigma(C)$ & die EW mit $|\lambda| = 1$ halbeinfach sind
- instabil : in allen anderen Fällen

Definitionen beim letzten Kapitel!

Beispiel:

$$u''(t) + 2a(t)u'(t) + b(t)u(t) = 0$$

a, b : reellwertig, stetig, ω-periodisch

Äquivalentes System:

$y = (u, u')^T$

$y' = A(t)y$ mit $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -2a \end{pmatrix}$

Es sei : $\{u, v\}$ ein FUSY mit den Anfangswerten

$$\begin{cases} u(0) = 1 \,, & v(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \,, & v'(0) = 1 \end{cases}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} \Rightarrow X(\omega) = C = \begin{pmatrix} u(\omega) & v(\omega) \\ u'(\omega) & v'(\omega) \end{pmatrix}$$

- $\det(C - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(C) + \det(C)$
- $\det(C) = \exp\left[\int_0^\omega \operatorname{tr}(A(s))\,ds\right] =: \gamma$ • $\operatorname{tr}(C) = u(\omega) + v'(\omega) =: 2\alpha$

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \gamma = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \gamma}$$

- $\lambda_1 \lambda_2 = \gamma > 0$, $\omega(\mu_1 + \mu_2) = \log(\gamma)$

Fallunterscheidung:

① $\alpha^2 \neq \gamma$ [zwei reelle oder konjugiert-komplexe EW λ_1, λ_2]

FUSY : $u_1(t) = p_1(t) e^{\mu_1 t}$, $u_2(t) = p_2(t) e^{\mu_2 t}$

$(u_i(t+\omega) = \lambda_i u_i(t)$, $i = 1,2)$

② $\alpha^2 = \gamma$ [der einzige EW α ist halbeinfach]

FUSY : $u_1(t) = p_1(t) e^{\mu t}$, $u_2(t) = p_2(t) e^{\mu t}$ (wie bei ①)

Für jede Lösung u gilt $u(t+\omega) = \alpha u(t)$

(3) $\alpha^2 = \gamma$ [der einzige EW α ist nicht halbeinfach]

FHSY: $u_1(t) = p_1(t) e^{\mu t}$, $u_2(t) = (p_2(t) + p_3(t)\,t) e^{\mu t}$

Die Hillsche DGL: Für $a(t) \equiv 0$ erhält man:

$$u'' + b(t) u = 0 \quad (b(t) \text{ } \omega\text{-periodisch})$$

- $\operatorname{tr}(A(t)) = 0 \Rightarrow \gamma = \det(C) = 1$
- $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$, $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, $\mu_1 + \mu_2 = 0$

- $|\alpha| > 1$: $\lambda_1 > 1 \Rightarrow$ die Nulllösung ist instabil.
- $|\alpha| < 1$: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $(\beta > 0)$
  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 \Rightarrow$ die Nulllösung ist stabil

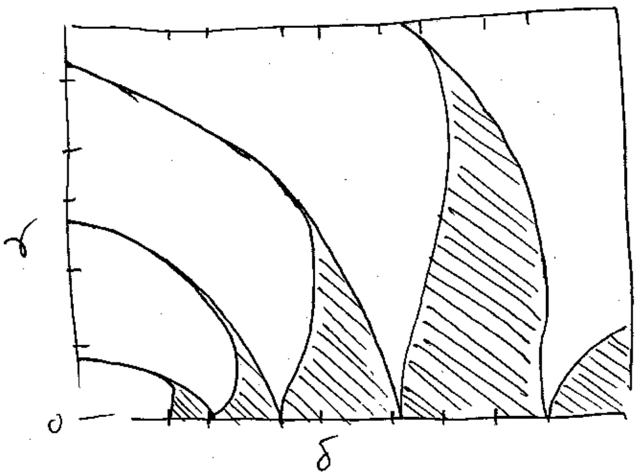
- $|\alpha| = 1$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ oder -1
  Ist λ halbeinfach $\Rightarrow$ stabil,
  sonst instabil.

  Falls λ halbeinfach ist $\Rightarrow$ $X(\omega) = X(0)$ für $\alpha = 1$
  bzw. $X(2\omega) = X(0)$ für $\alpha = -1$

  $\Rightarrow$ alle Lösungen der DGL sind also periodisch mit Periode ω, bzw. 2ω.

Die Mathieusche DGL

$$u'' + (\delta + \gamma \cos(2t)) u = 0 \quad (\omega = \pi)$$



"Stabilitäts-Karte"

▨ : stabil

□ : instabil

(mehr beim nächsten Kapitel!)

$$y' = A(t)y \quad \text{mit} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{\cos(t)+\sin(t)}{(2-\cos(t)+\sin(t)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$y_2'(2-\cos(t)+\sin(t)) = (\cos(t)+\sin(t))y_2$$

$$\Longrightarrow y_2 = c_2(2+\sin(t)-\cos(t))$$

$$y_1' - y_1 = y_2 = c_2(2+\sin(t)-\cos(t))$$

$$y_1 = c_1 e^t - \underbrace{c_2(2+\sin(t))}_{\text{partikuläre Lösung!}}$$

Wähle: $c_1 = 0, c_2 = 1$, $c_1 = 1, c_2 = 0$

- $$X(t) = \begin{pmatrix} -2-\sin(t) & e^t \\ 2+\sin(t)-\cos(t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(X(0)) = -1$$

$$X(0)^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $$Y(t) = X(0)^{-1} X(t) = \begin{pmatrix} 2-\cos(t)+\sin(t) & 0 \\ 2-2\cos(t)+\sin(t) & e^t \end{pmatrix}$$

- $\omega = 2\pi$:

$$Y(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi} \end{pmatrix} = C$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = e^{2\pi}$$

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 1$$

Nun zur Floquet-Darstellung: $X(t) = Q(t)e^{tB}$

$$C = e^{\omega B} \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

$$Q(t) = X(t)e^{-tB} = X(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-\sin(t) & 1 \\ 2-\cos(t)+\sin(t) & 0 \end{pmatrix}$$

$Q(t)$: 2π-periodisch!