

Stabilität + Qualitative Theorie

Betr.: $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x})$

Sei $\underline{x}(t)$ eine Lösung, und sei $\underline{f}$ wohldefiniert auf $0 \leq t < \infty$, $\|\underline{y} - \underline{x}(t)\| < \alpha$ ($\alpha > 0$).

Dann heißt $\underline{x}(t)$ stabil im Sinne von Lyapunov, wenn $\forall \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ ex., so dass alle Lsg. $\underline{y}(t)$ mit $\|\underline{y}(0) - \underline{x}(0)\| < \delta$ autom. für alle $t \geq 0$ ex. und $\|\underline{y}(t) - \underline{x}(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$ erfüllen.

Eine Lsg. $\underline{x}(t)$ heißt asymptotisch stabil, wenn ein $\delta > 0$ ex. so dass für jede Lsg. $\underline{y}(t)$ mit $\|\underline{y}(0) - \underline{x}(0)\| < \delta$ gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{y}(t) - \underline{x}(t)\| = 0$$

Eine Lsg. $\underline{x}(t)$ heißt instabil, wenn sie nicht stabil ist.

Bem.: Man kann das von 0 auf einen bel. anderen Punkt legen; falls $\underline{f}$ lokal Lipschitz ist, hat das keinen Einfluss auf die Eigenschaft.

Ziel: $\dot{\underline{x}} = A(t) \underline{x} + \underline{b}(t)$

↪ Zuerst linear: $\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$, A konstant

↪ Studiere die Nulllösung!

Satz: $\underline{x} \equiv 0$ ist für $\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$ stabil $\Leftrightarrow$

(1) $\operatorname{Re}(\sigma(A)) \leq 0$

(2) jedes $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$
ist halbeinfach (d.h.: geom. = algebr. Mult.)

$\underline{x} \equiv 0$ ist asymptotisch stabil $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\sigma(A)) < 0$.

Bew.: Abschätzen von e^{tA} ∇

Denn die Lösung lautet ja:

$$\underline{x}(t) = e^{tA} \underline{x}_0$$

Alternativ können wir uns auch eine bel. Lsg. $u(t)$ ansehen. Diese muss eine Linear-komb. von Funktionen $t^m e^{\lambda t} \underline{y}$ sein (mit $A \underline{y} = \lambda \underline{y}$).

Dann ist

$$\|t^m e^{\lambda t} \underline{y}\| = t^m \cdot e^{t \operatorname{Re}(\lambda)} \cdot \|\underline{y}\| \quad (t \geq 0)$$

Wenn nun $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$, so folgt
 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$, und dies gilt auch nur dann.

Für die Stabilität brauchen wir sicher, dass
 $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$. Wenn nun
 $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ auftritt, darf kein Term der Form
 t^m vorkommen $\Leftrightarrow \lambda$ ist halbeinfach.

□

Der Fall $\dot{\underline{x}} = A(t) \underline{x}$ ist schwieriger und soll hier nicht behandelt werden. Wir wollen aber noch folgendes festhalten:

Satz: Ist die Nulllösung der homogenen Gl. $\dot{\underline{x}} = A(t) \underline{x}$ (asymptotisch) stabil, so hat jede (!) Lösung der inhomogenen Gleichung $\dot{\underline{x}} = A(t) \underline{x} + \underline{b}(t)$ dieselbe Eigenschaft.

Bew.:

Seien $\underline{x}(t)$ und $\underline{y}(t)$ 2 Lsg. der inhomogenen Gl. - dann ist $\underline{z}(t) = \underline{x}(t) - \underline{y}(t)$ eine Lsg. der homogenen Gleichung. Also:

$$\| \underline{x}(t) - \underline{y}(t) \| = \| \underline{z}(t) \| = \| \underline{z}(t) - 0 \|$$

und alle Abschätzungen von $\underline{z}(t) - 0$ übertragen sich auf $\underline{x}$ im Vergleich zu $\underline{y}$ (oder umgekehrt).

□

An dieser Stelle ist es nun sinnvoll, sich das Verhalten linearer Systeme etwas genauer und systematischer anzusehen.

Ziel: Klassifikation!

Lineare Flüsse im $\mathbb{R}^2$

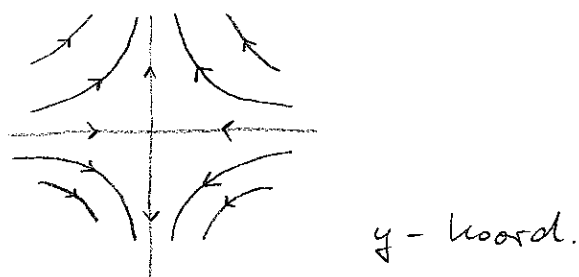
$$\boxed{\dot{\underline{x}} = A \underline{x}} \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

Dazu betrachten wir ggf. das äquivalente System $\dot{\underline{y}} = B \underline{y}$ nach einem geeigneten Basiswechsel, d.h. $B = P^{-1} A P$ für $P \in GL(2, \mathbb{R})$.

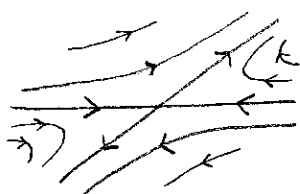
1. Fall: $\sigma(A) = \{\lambda, \mu\}$ mit $\lambda < 0 < \mu$.

Dann ist A einfach, diagonalisierbar, und wir können $B = \text{diag}(\lambda, \mu)$ wählen.

Phasenporträt:



und original sieht es vielleicht so aus:



Der Nullpunkt heißt hier ein Sattel.

2. Fall: Alle $\lambda \in \sigma(A)$ haben $\text{Re}(\lambda) < 0$.

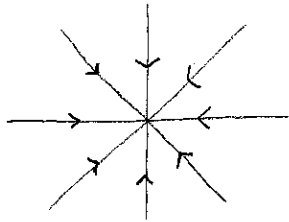
$\Rightarrow$ 0 ist asymptotisch stabil, Senke.

Wir müssen nun Unterfälle ansehen.

(a) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, also $\lambda \leq \mu < 0$.

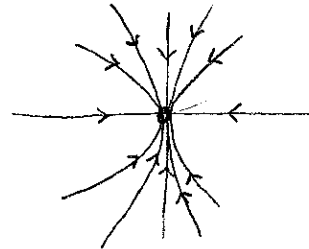
A halbeinfach:

$$B = \text{diag}(\lambda, \lambda)$$



Focus

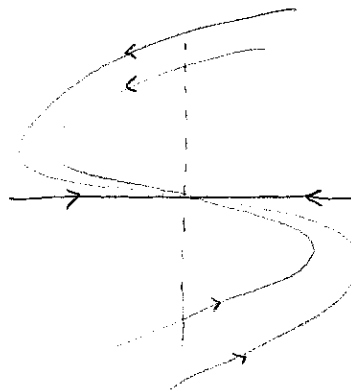
$$B = \text{diag}(\lambda, \mu)$$



stabiler Knoten

A nicht halbeinfach:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$



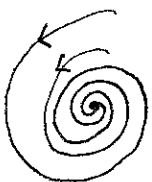
uneigentlicher Knoten

(b) $\sigma(A) \not\subset \mathbb{R}$, also $\sigma(A) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$ (da A reell).

Sei $\lambda = \alpha + i\omega$, $\omega \neq 0$

$$\leadsto B = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tB} = e^{\alpha t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Dehnung/} \\ \text{Stauchung} \quad \text{Drehung}}$$

Da $\alpha < 0$, haben wir:



stabiler Strudel

3. Fall: $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$.

$\Rightarrow$ instabil!

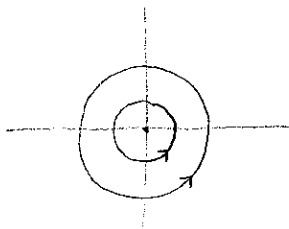
Man bekommt durch Pfeilumkehr aus Fall 2 die Typen:

- instabiler Focus
 - " Knoten
 - " Strudel
- } 0 ist eine Quelle

4. Fall: $\sigma(A) \subset i \cdot \mathbb{R}$ (rein imaginär)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{da } \sigma(A) = \{\lambda, \bar{\lambda}\})$$

$$\Rightarrow e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$



y-koord.



(Ellipsen)

x-koord.

Dies heißt Zentrum oder Wirbel.

Lit: Buch von Amann

Wie sieht man das alles schnell?

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot \mathbb{1}) = \lambda^2 - \text{Spur}(A)\lambda + \det(A)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}(\text{Spur}(A) \pm \sqrt{D})$$

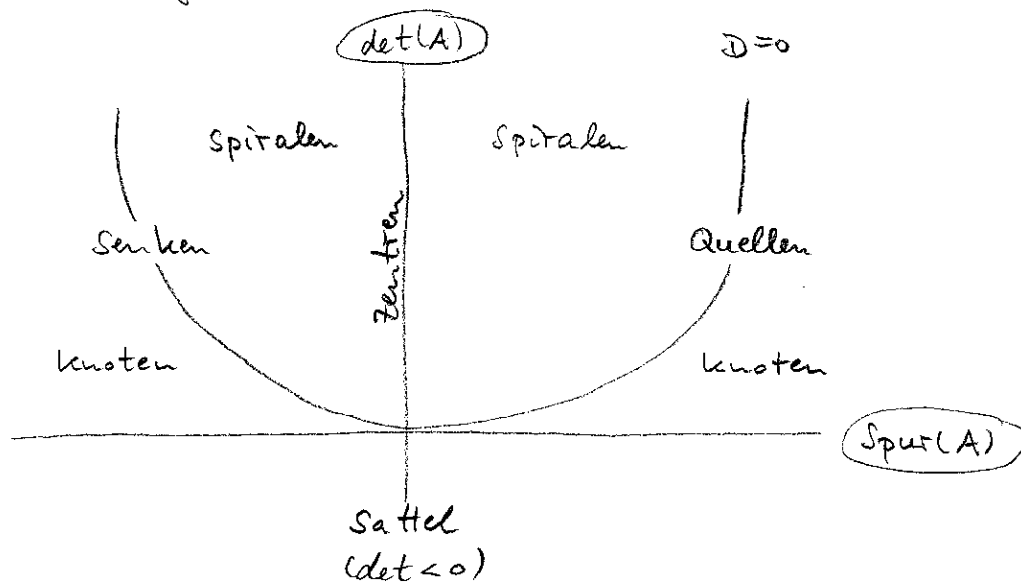
mit $D = (\text{Spur}(A))^2 - 4 \det(A)$ (Diskriminante)

Hieran kann man die obigen Fälle ablesen:

- $D \geq 0$ $\rightarrow$ reell
- $\text{Spur}(A) < 0, D < 0$ $\rightarrow$ kompl., neg. Realteil

etc.

Darstellung in "Spur - det - Ebene":



Man kann nun daran gehen, analoge Dinge in höheren Dimensionen zu betreiben. Besonders wichtig sind hyperbolische Flüsse.

Def.: Der Fluss der Dgl. $\dot{x} = Ax$ heißt
hyperbolisch : $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$.

Satz: Sei e^{tA} ein linearer, hyperbolischer Fluss.
Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$A = A_s \oplus A_u, \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$$

so dass e^{tA_s} eine Kontraktion und e^{tA_u}
eine Expansion ist.

(ohne Beweis)

Warum sind diese Flüsse so wichtig?

↪ Sie sind strukturell stabil!

Satz: Ist A hyperbolisch, und S eine
Matrix mit hinreichend kleiner Norm,
so ist auch $A+S$ noch hyperbolisch.

Bew.: Anschaulich klar!

□

Bem.: Für elliptische Matrizen (d.h. mit
Eigenwerten mit $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$) kann so etwas
nicht gelten: "knapp vorbei ist auch daneben".

↪ Anwendung: "Is the solar system stable?"
(J. Moser, Neue Zürcher Zeitung)

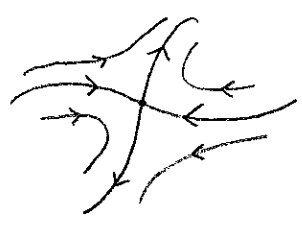
Ausblick: Mehr zur qualitativen Theorie.

⊗ $\dot{x} = f(x)$ (autonomes System)

Sei 0 ein kritischer Punkt, also $f(0) = 0$.

Dann heißt $\dot{x} = A x$ mit $A = df(0)$ die an der Stelle 0 linearisierte Gleichung.

Idee:



vorher



nachher

(hyperbolisch)

Satz: (Grobman - Hartman)

Sei 0 (allgemeiner: x_0) ein hyperbolischer, kritischer Punkt der Gleichung ⊗. Dann sind die Flüsse von ⊗ und der Linearisierung in einer Umgebung isochron flussäquivalent (top. konjugiert).

(Amann, S. 287).

Folgerung: Auch bei ⊗ bekommen wir (lokal!) strukturelle Stabilität! ▽

Die Bedeutung hiervon kann kaum zu hoch eingeschätzt werden (mehr dazu in H.B. II) ▽