(Ex) $\dot{x} = -2x, \quad x(t_0) = x_0$ (Ann.: $x_0 \neq 0$, sonst $x \equiv 0$)

Dies ist "fast" wie oben, aber mit vertauschten Rollen für x und t!

Formaler Trick:

$$\frac{dx}{dt} = -2x \quad \curvearrowright \quad \frac{dx}{x} = -2\,dt$$

$$\curvearrowright \quad \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi} = -\int_{t_0}^{t} 2\,d\tau = 2(t_0 - t)$$

$$\parallel$$

$$\log\left|\frac{x}{x_0}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{x}{x_0}\right| = e^{2(t_0-t)} \qquad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 \cdot e^{2(t_0-t)}$$

Bem.: Ist $x(\tau) = 0$, so ist $x(t) = 0$, $\forall\, t \geq \tau$.
Dies erlaubt die Entscheidung des Vorz.!

Allgemeiner: $\boxed{\dot{x} = f(x)}$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{f(x)} = \int dt = t + C$$

$$\Rightarrow \quad t = t(x) = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)} \qquad (*)$$

Wenn $f(x) \neq 0$ im relevanten Bereich, so definiert $(*)$ eine Funktion $t = t(x)$, deren Umkehrfunktion die DGL (bzw. das AWP) löst.

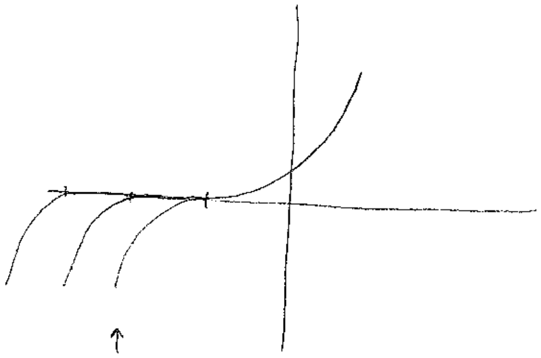
Hier ist das Richtungsfeld entlang der t-Achse (und auf Parallelen dazu) konstant.

Ein anderes Beispiel:

$$\boxed{\dot{x} = \sqrt{|x|}}$$

Lösungen: $\quad x(t, C) = \dfrac{(x+C)^2}{4}, \quad t \in (-C, \infty)$

Hier haben wir ein Problem vorliegen:



∞-viele Fortsetzungen möglich!

$\Rightarrow$ keine Eindeutigkeit.

Details: Übung!

Es scheint also doch nicht immer zu klappen mit der Eindeutigkeit, und wir brauchen da "harte Fakten". Darauf kommen wir in Kürze!

Trennung der Veränderlichen, allgemeiner Fall

$$\boxed{\dot{x} = f(t)\cdot g(x)} \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (*)$$

Formal:

$$G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{g(s)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau =: F(t) \qquad (**)$$

Satz: Sei $f(t)$ $(g(x))$ im Intervall I_t (I_x) stetig, $t_0 \in I_t$, $x_0 \in I_x$.
Weiter sei x_0 inneres Punkt von I_x, mit $g(x_0) \neq 0$.
Dann gibt es eine (falls t_0 Randpunkt: einseitige) Umgebung von t_0, in der das AWP $(*)$ genau eine Lösung $x(t)$ besitzt.
Sie ergibt sich durch Auflösen von $(**)$ nach x.

Bew.:
Erinnerung: Ist ϕ in I diffbar mit $\dot{\phi}(t) \neq 0$ in I, so ex. eine Umkehrfunktion, die in $I^* = \phi(I)$ diffbar ist!

Sei $G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{g(s)}$, also $G'(x) = \frac{1}{g(x)} \neq 0$ in einer Umgebung von x_0. Also ex. Umkehrfunktion H.
Sei F die rechte Seite von $(**)$, so dass

$$G(x) = F(t), \quad \text{also auch} \quad x = H(G(x)) = H(F(t))$$

Sei $x(t) := H(F(t))$. Dann ist $G(x(t)) = F(t)$ und

$$\underbrace{G'(x(t))}_{= 1/g(x(t))} \cdot \dot{x}(t) = \dot{F}(t) = f(t)$$

Also

$$\dot{x}(t) = f(t) \cdot g(x(t))$$

und aus $F(t_0) = G(x_0) = 0$, $H(0) = x_0$, folgt auch, dass

$$x(t_0) = H(F(t_0)) = H(0) = x_0,$$

also liegt (lokale) Lösung des AWP vor!

Zur <u>Eindeutigkeit</u>:

Sei $z(t)$ eine andere Lösung, so gilt in einer Umgebung von x_0:

$$\frac{\dot{z}(t)}{g(z(t))} = f(t)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{z}(\tau)}{g(z(\tau))}\, d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau = F(t)$$

$$\Big\| \quad s = z(\tau)$$

$$\int_{x_0}^{z(t)} \frac{ds}{g(s)}$$

$$\Rightarrow \quad F(t) = G(z(t))$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = H(F(t)) = x(t).$$

$\square$

Alles hängt also von der lokalen Existenz der Umkehrfunktion ab!

Trennung der Veränderlichen:

$$\dot{x} = f(t)\cdot g(x) \quad \curvearrowright \quad \int \frac{\dot{x}\,dt}{g(x)} = \int f(t)\,dt$$

$\curvearrowright$ "Lösen per Stammfunktion"

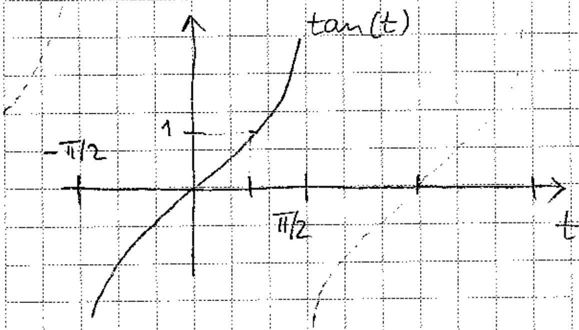
Dabei: 1. Schritt: Integrieren (Details zurückstellen)

2. Schritt: Prüfen, Definitionsbereiche etc.

Ex $\quad \dot{x} = 1 + x^2, \quad x(0) = 1$

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$\curvearrowright \quad \arctan(x(t)) = t + c, \qquad x(t) = \tan(t+c)$



$\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$

$x(0) = 1 \quad \curvearrowright \quad c = \frac{\pi}{4} \quad (+n\cdot\pi)$

$\curvearrowright \quad \boxed{x(t) = \tan(t + \frac{\pi}{4})}$

mit $-\frac{3\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$

- Singularitäten bei $-\frac{3\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$, keine differenzierbaren Fortsetzungen!

Ex $\quad \dot{x} + \frac{\sin(t)}{1+e^x} = 0, \quad x(0) = 0$

$$\int (1+e^x)\,\dot{x}\,dt = -\int \sin(t)\,dt$$

$\Rightarrow \quad x + e^x = \cos(t) + c$

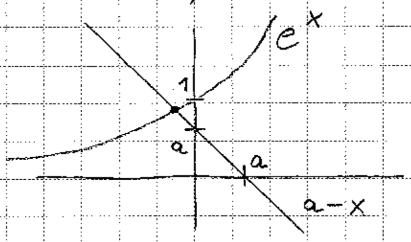
bei $t = 0$: $\quad 0 + 1 = 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = 0$

$\boxed{x + e^x = \cos(t)}$ $\qquad$ implizite Lösung!

wie lösen?

$x + e^x = a$, $a = \cos(t)$, also $|a| \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad e^x = a - x$



offenbar immer genau eine Lösung!

Ansatz:

Umschreiben in Fixpunktgleichung & Iteration

(1) $\underbrace{e^x + 2x - a}_{f(x)} = x \quad \curvearrowright \quad f'(x) = e^x + 2 > 2$: ungünstig

(2) $x = \underbrace{\log(a-x)}_{g(x)}$ $\quad$ ($a > x$, passt zur Skizze)

$\curvearrowright \quad g'(x) = \frac{1}{x-a}$: besser, aber... Iteration kann auf 0 treffen ↯

(3) Newton-Verfahren ($\curvearrowright$ später)

Ex $\quad \dot{x} = (t+x)^2$

Substitution: $u = t + x$, $\dot{u} = 1 + \dot{x} = 1 + u^2$

$\overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \quad u(t) = \tan(t + c)$

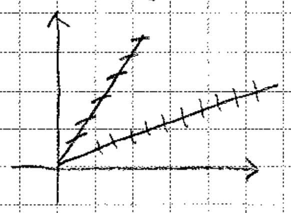
$\Rightarrow \quad x(t) = u(t) - t = \tan(t+c) - t$

Allgemeiner: $\boxed{\dot{x} = f(\alpha t + \beta x + \gamma)}$ $\quad$ ($\beta \neq 0$, sonst klar)

$u(t) = \alpha t + \beta x + \gamma$, $\dot{u} = \alpha + \beta \dot{x} = \alpha + \beta f(u)$

$\curvearrowright$ Lösen per TdV, $x = \frac{1}{\beta}(u - \alpha t - \gamma)$

Homogene Gleichung: $\boxed{\dot{x} = f(x/t)}$



Richtungsfeld ist konstant auf Ursprungsgeraden, also sind Streckungen Symmetrien des RF!

Ansatz: $u(t) = \frac{x(t)}{t} \Rightarrow \boxed{x = t \cdot u}$

$$\Rightarrow \dot{x} = u + t \cdot \dot{u} = f(u) \Rightarrow \dot{u} = \frac{f(u) - u}{t}$$

also TdV!

Ex $\dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{t^2}{x^2} \quad (t \neq 0)$

Also $f(u) = u + \frac{1}{u^2} \curvearrowright \dot{u} = \ldots = \frac{1}{t \cdot u^2}$

$$\curvearrowright \underbrace{\int u^2 \dot{u}\, dt}_{\frac{1}{3}u^3} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c$$

$$\Rightarrow u(t) = \{3(\log|t| + c)\}^{1/3} \Rightarrow x(t) = t \cdot u(t)$$

Ex $\dot{x} = \frac{x+t+3}{x-t+1}$ per Koordinatenwechsel:

$\begin{Bmatrix} x_0 + t_0 + 3 = 0 \\ x_0 - t_0 + 1 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_0 = -2 \\ t_0 = -1 \end{Bmatrix} \curvearrowright \bar{x} = x + 2, \ \bar{t} = t + 1$

$$\curvearrowright \frac{x+t+3}{x-t+1} = \frac{\bar{x}+\bar{t}}{\bar{x}-\bar{t}} = \underbrace{\frac{\bar{x}/\bar{t} + 1}{\bar{x}/\bar{t} - 1} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}(\bar{t})}_{} \quad \text{(Kettenregel!)}$$

homogen, lösen wie oben, dann $x = \bar{x} - 2$