Lineare Differentialgleichungen

Jetzt zur Abwechslung:

x: Variable

y: Funktion, $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\boxed{y' + g(x)\cdot y = h(x)}\,,\quad g, h \text{ stetig in Intervall } J$$

(inhomogene Gleichung)

Setze: $L(y) = y' + g(x)\cdot y$

Dann ist:

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$$

Damit können wir schreiben:

$$L(y) = 0 \qquad \text{(homogen)}$$

$$L(y) = h(x) \qquad \text{(inhomogen)}$$

Lemma: Die Funktionen y_1 und y_2 seien Lösungen von $L(y) = h(x)$. Dann ist $\tilde{y} := y_1 - y_2$ eine Lösung von $L(y) = 0$.

Bew.: $L(\tilde{y}) = L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2)$

$$= h(x) - h(x) \equiv 0.$$

□

Also: Allg. Lsg. der inhom. Gl. setzt sich aus spezieller Lsg. der inhom. Gl. und allgem. Lsg. der homogenen Gl. zusammen!

Betrachten wir: $\boxed{L(y) = 0}$

$$\frac{dy}{dx} + g(x)\cdot y = 0 \qquad \text{getrennte Veränderliche!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -g(x)\,dx \qquad (g \text{ stetig})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x;C) = C\cdot\exp\Big(\underbrace{-\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi}_{G(x)}\Big)} \qquad \circledast$$

Sind das alle Lösungen? Ja! Denn:

Sei ϕ Lösung von $L(\phi) = 0$.

Dann setzen wir $u(x) = \exp(G(x))\cdot\phi(x)$

und bekommen:

$$u'(x) = \exp(G(x))\,(\phi'(x) + g(x)\cdot\phi(x)) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad u(x) \equiv C \quad \Rightarrow \quad \circledast$$

$\square$

Jetzt: $\boxed{L(y) = h(x)}$

"Variation der Konstanten":

$$y(x;C) = C\cdot\exp(-G(x)) \quad \curvearrowright \quad \underline{C = C(x)}$$

Damit:

$$L(y) = (C'(x) - g(x)\,C(x) + g(x)\,C(x))\cdot e^{-G(x)}$$

$$= C'(x)\cdot e^{-G(x)} \overset{!}{=} h(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad C(x) = \int_{x_0}^{x} h(\xi)\,e^{G(\xi)}\,d\xi + C_0$$

Fassen wir zusammen:

<u>Satz:</u> Betrachte das AWP

$$L(y) = y' + g(x)\cdot y = h(x), \qquad y(x_0) = y_0 .$$

Sind g und h in J stetig, mit $x_0 \in J$, so besitzt das AWP genau eine Lösung:

$$y(x) = e^{-G(x)} \cdot \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} h(\xi)\, e^{G(\xi)}\, d\xi \right),$$

wobei $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(\xi)\, d\xi$. Dies gilt in ganz J. $\square$

Ex $\quad y' + \sin(x)\cdot y = (\sin(x))^3, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta$

$G(x) = -\cos(x)$: Stammfunktion von $\sin(x)$

$\rightsquigarrow \quad z(x;C) = C\cdot e^{\cos(x)}$ löst $L(y) = 0$.

Damit:

$$y(x) = e^{\cos(x)} \left(\eta + \int_{\pi/2}^{x} (\sin(\xi))^3\, e^{-\cos(\xi)}\, d\xi \right)$$

$$s = \cos(\xi) \qquad ds = -\sin(\xi)\, d\xi$$

$$= e^{\cos(x)} \left(\eta + \int_{0}^{\cos(x)} (s^2 - 1)\, e^{-s}\, ds \right)$$

$$= e^{\cos(x)} \left(\eta - (s^2 - 1 + 2s + 2)\, e^{-s} \Big|_{0}^{\cos(x)} \right)$$

$$= e^{\cos(x)} \left(\eta + \left(\sin^2(x) - 2\cos(x) - 2\right) e^{-\cos(x)} + 1 \right)$$

$$= \eta\cdot e^{\cos(x)} + \left(\sin^2(x) - 2\cos(x) - 2\right) + e^{\cos(x)}$$

$$= (\eta + 1)\, e^{\cos(x)} - (1 + \cos(x))^2$$

Existenz- und Eindeutigkeit

$$\boxed{\dot{x} = f(t,x)} \quad , \qquad x(t_0) = x_0 \qquad \text{(AWP)}$$

Wir hatten an Beispielen gesehen, dass eine Umformulierung hilfreich ist:

$$\int_{t_0}^{t} \dot{x}(\tau)\, d\tau = x(t) - x(t_0)$$

$$= \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau}$$

Volterra-Gleichung

Iteration:

$$x^{(0)} \equiv x_0$$

$$x^{(n+1)}(t) = x^{(n)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x^{(n)}(\tau))\, d\tau$$

Beobachtung:

Scheint "in der Regel" schnell zu konvergieren.
Der Limes ist i.a. die gesuchte Lösung.

Bem.:
- Lösungsbegriff evtl. unterschiedlich
- Eigenschaften von f sicher wichtig
- Für Numerik evtl. auch geeignet
- Etwas Abstraktion notwendig!

$\curvearrowright$ Banach'scher Fixpunktsatz

<u>Def.:</u> Sei X eine Menge. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ heißt <u>Metrik</u>, wenn gilt:

(M1) $d(x,y) \geq 0$, mit: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall\, x,y \in X$ (Symmetrie)

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall\, x,y,z \in X$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar (X,d) heißt <u>metrischer Raum</u>.

Ex $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$

$X = \{0,1\}^n$, $d(x,y) = $ Hamming-Distanz

$X = C([0,1],\mathbb{R})$, $d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$

<u>Def.:</u> $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ heißt <u>Cauchyfolge</u>, falls für alle $\varepsilon > 0$: $\exists\, n_0$: $\forall\, n > n_0,\ m > 0$: $d(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon$.
Sie <u>konvergiert</u>, falls ein x ex. mit $d(x_n - x) < \varepsilon$ für alle $n > n_0(\varepsilon)$.

Ein metr. Raum heißt <u>vollständig</u>, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Ex
- $\mathbb{R}^n$ mit $d(x,y) := \|x-y\|$
  $\uparrow$
  Norm: s. Übung!

- $C([0,1],\mathbb{R})$ mit $d(f,g) := \|f-g\|_\infty$
  wobei $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

Was ist eine <u>Norm</u>?

<u>Def.:</u> Sei V ein Vektorraum über k, $k=\mathbb{R}$ oder $k=\mathbb{C}$.
$\|.\| : V \to \mathbb{R}$ heißt <u>Norm</u>, falls

(N1) $\|x\| \geq 0$, mit $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(N2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ für alle $a \in k$, $x \in V$.

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

$(V, \|.\|)$ heißt <u>normierter Raum</u>.

Ist V bzgl. $\|.\|$ vollständig, heißt V <u>Banach-Raum</u>.

Ex
- $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$
- $C([0,1], \mathbb{R})$, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

<u>Bem.:</u>
- $d(x,y) = \|x-y\|$ ist Metrik (↝ Übung!)
- Nicht jede Metrik kommt von einer Norm
- Für metr. Räume benötigt man keine VR.

<u>Def.:</u> Zwei Normen $\|.\|$ und $|||.|||$ auf V heißen <u>äquivalent</u>, wenn es Konstanten $a, b > 0$ gibt, so dass

$$a \cdot \|x\| \leq |||x||| \leq b \cdot \|x\| , \quad \forall x \in V.$$

<u>Bem.:</u>
- Dann ist auch $\frac{1}{b} |||x||| \leq \|x\| \leq \frac{1}{a} |||x|||$
- Konvergenz in $\|.\|$ $\iff$ Konv. in $|||.|||$ (↝ Übung!)