Satz: (X,d) sei vollst. metrischer Raum, und $f: X \to X$ sei Abbildung mit der Eigenschaft: $d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x,y)$, $\forall x,y \in X$, mit $0 \leq r < 1$.

Dann ist f eine Kontraktion, und es gilt:

(1) Es gibt genau einen Fixpunkt x von f in X.

(2) Sei $x_0 \in X$ bel., und $x_{n+1} := f(x_n)$. Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ gegen x.

(3) Dabei gilt:

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{1-r}\, d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{r^n}{1-r}\, d(x_1, x_0)$$

Bew.: Es kann höchstens einen Fixpunkt geben, denn aus $f(x) = x$ und $f(y) = y$ folgt:

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x,y).$$

Da $r < 1$, geht dies nur für $d(x,y) = 0$, also (wegen (M1)) $x = y$.

Sei nun $x_0 \in X$, $x_{n+1} := f(x_n)$. Dann ist:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq r \cdot d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq \ldots \leq r^n \cdot d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq \sum_{l=0}^{m-1} d(x_{n+l+1}, x_{n+l}) \qquad (M3) \\ &\leq \sum_{l=0}^{m-1} r^{n+l}\, d(x_1, x_0) \\ &= r^n \frac{1-r^m}{1-r}\, d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{r^n}{1-r} \cdot d(x_1, x_0) = C \cdot r^n \end{aligned}$$

$\Rightarrow (x_n)_{n\geq 0}$ ist Cauchy $\overset{X \text{ vollst.}}{\Rightarrow}$ Folge konvergiert.

Sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$

$= f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ (Stetigkeit von f !)

$= f(x)$

Also ist x (einziger) Fixpunkt von f.
Da $x_0 \in X$ bel. war, folgt (1) und (2).

Schließlich bleibt:

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \underbrace{d(x_{n+1}, x)}_{= d(f(x_n), f(x))}$$

$$\leq r \cdot d(x_n, x) + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\Rightarrow \quad d(x_n, x) \leq \frac{1}{1-r} d(x_{n+1}, x_n) \qquad (r < 1)$$

□

Alles sehr bemerkenswert!

Def.: Eine Funktion $f: X \to X$ heißt Lipschitz-Funktion (oder L-stetig), falls ein $L \geq 0$ ex. mit $d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x,y)$, für alle $x, y \in X$.

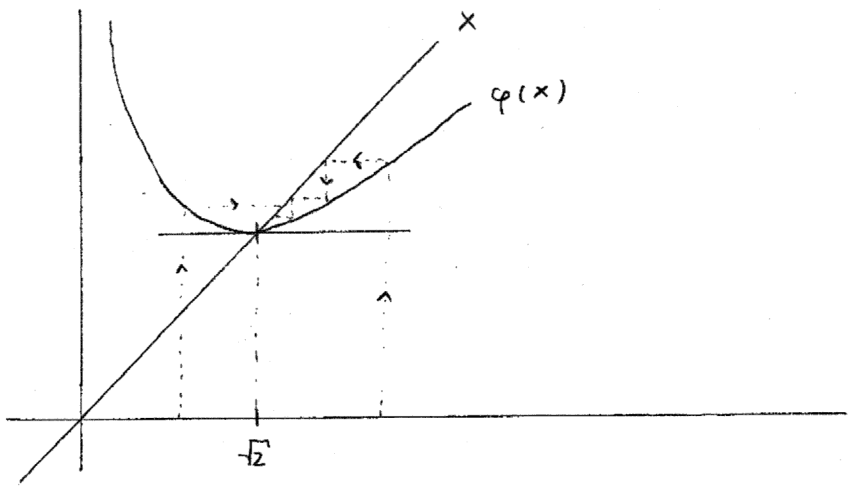
Bem.:
- Kontraktion ist Lipschitz
- L-stetig impliziert stetig (↝ Übung!)
- Werkzeug für Satz von P.-L. !

Zwischenfrage: Was gewinnen wir durch diesen "abstract nonsense"?

(Ex) <u>Heron - Verfahren:</u>

$$x_0 = a, \qquad x_{n+1} = \varphi(x_n), \qquad \varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$



$\sqrt{2}$ ist Lösung von $\varphi(x) = x$

Ist $0 < x_0 < \sqrt{2}$, so ist $x_1 > \sqrt{2}$,
und $\varphi([\sqrt{2}, \infty)) \subset [\sqrt{2}, \infty)$

$\curvearrowright$ Betrachte die Iteration auf $X = [\sqrt{2}, \infty)$.
Dann ist X mit $d(x,y) = |x-y|$ vollst. metr. Raum,
und $\varphi(X) \subset X$. Da φ diffbar, bekommen wir:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x-y|, \quad \xi \in (x,y) \quad \text{(MWS)}$$

Da aber $|\varphi'(\xi)| \leq \sup_{s \geq \sqrt{2}} |\varphi'(s)| = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ φ ist <u>Kontraktion</u> auf X, alle Startwerte $x_0 \geq \sqrt{2}$ führen zu Folgen, die gegen $\sqrt{2}$ konvergieren!
Ebenso für $x_0 \in (0, \sqrt{2})$ (warum?)

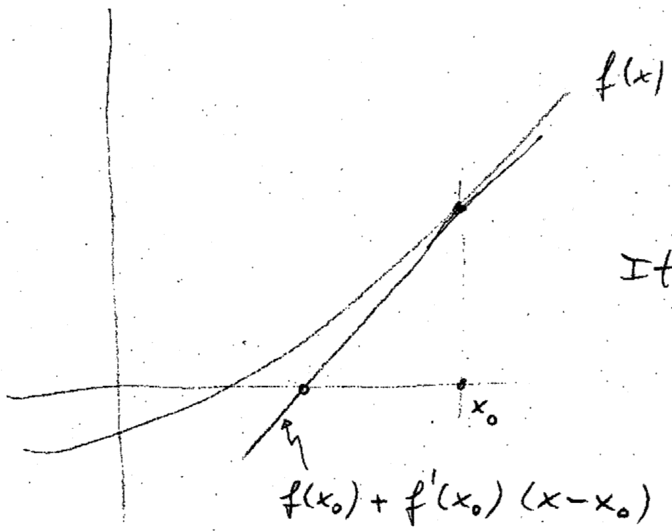
<u>Dabei:</u>

$$d(x_n, \sqrt{2}) \leq \frac{1}{2^n} d(x_0, \sqrt{2}) \qquad (x_0 \geq \sqrt{2})$$

schnelle Konvergenz!

Allgemein: Newton-Verfahren

$$\boxed{f(x) = 0}$$



Start: x_0

Iteration: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$\longrightarrow$ Nullstelle

Ex $\quad f(x) = x^2 - 2$

$\Rightarrow$ Iteration: $\quad x_{n+1} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \quad$ (s.o.)

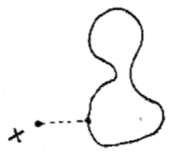
(Ex) <u>Cantor-Menge</u>

$f_1(x) = \frac{1}{3}x \quad ; \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$M_0 = [0,1] \; ; \quad M_{n+1} = f_1(M_n) \cup f_2(M_n) =: \varphi(M_n)$

<u>Ansatz:</u> $X = \{$ alle kompakten Teilmengen von $[0,1]\}$

Metrik ?

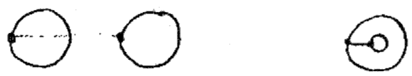


$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a)$$

mit $d(x,y) = \|x-y\|$

$$d_H(A,B) = \max\left\{ \sup_{x\in A} d(x,B), \; \sup_{y \in B} d(A,y) \right\}$$

(Hausdorff-Metrik)



$d_H(A,B) = 0 \iff A = B$

<u>Lemma:</u> $X = \{$ alle komp. Teilmengen des $\mathbb{R}^n\}$ wird mit d_H zu einem vollst. metr. Raum.

(ohne Bew.)

Damit zeigt man für "Cantor":

$$d_H(\varphi(A), \varphi(B)) \le \frac{1}{3} \cdot d_H(A,B),$$

also ist φ <u>Kontraktion</u>, und die Iteration konvergiert gegen eine kompakte Menge, den sog. <u>Attraktor</u> – egal, von welcher komp. Menge man startet ! (z. B. auch: $M_0 = \{0\}$).

Zufallsspiel:

$$f_1(x) = \frac{x}{3} \quad ; \quad f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

$$M_0 = \{0\}, \quad M_{n+1} = f_1(M_n) \cup f_2(M_n)$$

$\longrightarrow$ Cantor-Menge (!)

Aber: $\#(M_n) = 2^n$

Lösung:

$$x_0 = 0 \; ; \quad x_1 = \left(f_1(x_0) \text{ oder } f_2(x_0) \right)$$

je mit $p = 1/2$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \left(f_1(x_n) \text{ oder } f_2(x_n) \right)$$

$\Rightarrow$ ergibt Folge $(x_n)_{n \geq 0}$, die die Cantor-Menge "auffüllt" (erläutern: in welchem Sinne)

Nun <u>Volterra:</u> (für $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad , \quad t_0, t \in I$$

$$= \underbrace{(\overset{\text{Funktion}}{\varphi}(x))}_{\text{Funktion}}(t)$$

d.h.: $\varphi : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$

$\qquad x \mapsto \varphi(x)$

wobei also $\varphi(x) : t \mapsto (\varphi(x))(t)$

Also schauen wir einmal nach:

Sei $d(x,y) = \| x - y \|_\infty$ (erster Versuch)

Dann:

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = \| \varphi(x) - \varphi(y) \|_\infty = \sup_{t \in I} |(\varphi(x) - \varphi(y))(t)|$$

mit:

$$|(\varphi(x) - \varphi(y))(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \right) ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} | f(s, x(s)) - f(s, y(s)) |\, ds$$

$$\leq |t - t_0| \cdot \sup_{s \in I} | f(s, x(s)) - f(s, y(s)) |$$

<u>Annahme:</u> f ist Lipschitz im 2. Argument,

also: $| f(t,x) - f(t,y) | \leq L \cdot |x - y|$, $\forall t \in I$,

dann bekämen wir:

$$|(\varphi(x) - \varphi(y))(t)| \leq |t - t_0| \cdot L \cdot \| x - y \|_\infty$$

$$\Rightarrow \quad \| \varphi(x) - \varphi(y) \|_\infty \leq L \cdot |t - t_0| \cdot \| x - y \|_\infty$$

Dann wäre φ eine Kontraktion, wenn wir eine Umgebung $J \subset I$ von t_0 wählen, so daß $L \cdot |t - t_0| \leq r < 1$ auf J.
Darüberhinaus kommt man dann durch "Stückeln".

<u>Alternative:</u> Geschichtere Norm wählen!

Setze:

$$\| y \| := \sup_{t \in I} |y(t)| \cdot e^{-\alpha t} \qquad (\alpha > 0 \text{ fest})$$

<u>Beh.:</u>
- Dies ist eine Norm auf $C(I, \mathbb{R})$
- Sie ist äquivalent zu $\|.\|_\infty$, Konvergenz bedeutet also dasselbe!

Wieso hilft das?

$$|(\varphi(x) - \varphi(y))(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \, ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} L \cdot |x(s) - y(s)| \, ds = L \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)| e^{-\alpha s} e^{\alpha s} \, ds$$

$$\leq L \cdot \|x - y\| \int_{t_0}^{t} e^{\alpha s} \, ds = L \, \|x - y\| \, \frac{e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0}}{\alpha}$$

$$\leq L \cdot e^{\alpha t} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \|x - y\|$$

$$\Rightarrow \quad |\varphi(x) - \varphi(y)|(t) \, e^{-\alpha t} \leq \frac{L}{\alpha} \|x - y\|$$

$$\Rightarrow \quad \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \frac{L}{\alpha} \|x - y\|$$

$\Rightarrow$ Wähle z.B. $\alpha = 2L$, und φ ist <u>Kontraktion</u>.

Damit können wir beweisen:

Satz: (Existenz- und Eindeutigkeitssatz, Satz von Picard-Lindelöf)

Betrachte das AWP $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ auf dem Streifen $S = \{ (t,x) \mid t_0 \le t \le t_0+a,\ x \in \mathbb{R} \}$. Sei f auf S stetig, mit L.-Bed.

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L \cdot |x-y|, \quad \text{auf ganz } S.$$

Dann besitzt das AWP genau eine Lösung. Sie existiert im ganzen Intervall $[t_0, t_0+a]$.

Bew.: Obiges Kontraktionsargument liefert eine stetige Fktn. $x(t)$, $t \in [t_0, t_0+a]$, die die Volterra-Gleichung löst:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

Da f auf S stetig ist, muß $x(t)$ aber diffbar sein (Hauptsatz der Inf.-Rechnung), und wir haben:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad \text{mit } x(t_0) = x_0 .$$

$\square$

Die Bedeutung dieses Satzes ist außerordentlich weitreichend!
Er besitzt div. (insbesondere: lokale) Variationen.

Def.: Die Fktn. $f(t,x)$ genügt in $D \subset \mathbb{R}^2$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. x, wenn zu jedem $t_0, x_0 \in D$ eine Umgebung $U = U(t_0, x_0)$ und eine konstante $L = L(t_0, x_0)$ existiert, so daß für f in $D \cap U$ gilt:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L\,|x-y|.$$

Lemma: Ist D offen und besitzt f eine in D stetige Ableitung f_x, so genügt f einer lokalen Lipschitzbedingung

Bew.: Übung! ($\curvearrowright$ Mittelwertsatz)

Satz: (lokale Version)
Ist D offen und genügt $f \in C(D)$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung in D, so ist das AWP $\dot{x} = f(t,x)$ mit $x(t_0) = x_0$ für $(t_0, x_0) \in D$ lokal eindeutig lösbar, d.h. in einer Umgebung von t_0 ex. genau eine Lösung.

Bew.: Eine Modif. des obigen Beweises, für Details s. Walter.

Bem.: Man kann (und muß!) die Fortsetzung bzw. Stückelung von Lösungen genau diskutieren! Wir unterlassen das nur aus Zeitgründen.

Wir hatten gesehen, daß $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ keine eind. Lösung des AWP besitzt – und natürlich ist die rechte Seite nicht Lipschitz! (warum?) Dennoch gibt es Lösungen.

Satz: (Existenzsatz von Peano)
Ist $f(t,x)$ in einem Gebiet D stetig, so geht durch jeden Punkt $(t_0, x_0) \in D$ mindestens eine Lösung der Dgl. $\dot{x} = f(t,x)$.
Jede Lösung läßt sich nach rechts und links bis beliebig nahe zum Rand fortsetzen.

(ohne Bew.)

Bem.:
- entweder Fixpunktsatz von Schauder, daher dann keine Eindeutigkeit
- oder über Arzelà-Ascoli und konvergente Teilfolgen + Approximationen

$\rightsquigarrow$ vgl. Walter und Heuser

Übung: Lösung einer Dgl. durch Potenzreihenansatz.