Lösung durch Potenzreihenansatz:

Oft ist die rechte Seite "besonders schön", also z.B. holomorph (= komplex analytisch). Dann kommt man (u.U.) mit Potenzreihen weiter.

Ex $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$

Ansatz: $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$

Einsetzen liefert:

$$\sum_{\ell \geq 1} \ell a_\ell x^{\ell-1} = x^2 + \sum_{m \geq 0} \sum_{k=0}^{m} a_k a_{m-k} x^m$$

Koeffizientenvergleich:

$$(\ell+1) a_{\ell+1} = \sum_{j=0}^{\ell} a_j a_{\ell-j} \quad (+1, \text{ falls } \ell = 2)$$

Also:

$a_0 = 1$ (wegen Anfangsbedingung), $a_1 = a_0^2 = 1$

$2a_2 = 2a_0 a_1 \curvearrowright a_2 = 1$

$3a_3 = 2a_0 a_2 + a_1^2 + 1 \curvearrowright a_3 = 4/3$

$4a_4 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 \curvearrowright a_4 = 7/6$

Damit: $y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{7x^4}{6} + \ldots$

Vermutung: $a_\ell \geq 1$ (Beweis: Induktion!)

$\Rightarrow y(x) \geq 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad (0 \leq x < 1)$

Damit liegt Konvergenz höchstens für $|x| < 1$ vor!

Übung: andere Abschätzung, und Mindest-Konv. ?

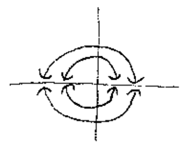
Exakte Dglen

Ist $f(x,y)$ in einem Gebiet D stetig, so bilden die Lösungen von $y' = f(x,y)$ eine Kurvenschar, die D überdecken (folgt aus Peano!). Umgekehrt kann man zu einer (einfach überdeckenden!) Kurvenschar auch eine Dgl. finden!

Ex $\quad x^2 + y^2 = r^2 \qquad (r > 0)$

$$\frac{d}{dx} \curvearrowright \quad y' + \frac{x}{y} = 0 \qquad \curvearrowright \quad y(x;r) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

$\curvearrowright$ Problem bei $x = \pm r$!



Zur Lösung wählen wir eine Parameterdarstellung:
$x(t) = r \cdot \cos(t), \; y(t) = r \cdot \sin(t).$

Dann bekommen wir:

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

Oder kurz: $\quad 2x \cdot dx + 2y \cdot dy = 0$

Allgemeiner betrachtet man dann

$$\boxed{g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0}$$

und "meint" die Gleichung

$$g(x,y)\,\dot{x} + h(x,y)\,\dot{y} = 0$$

für $x = x(t), \; y = y(t)$.

Diese Gl. wollen wir ein wenig studieren!

Ex $\quad \underbrace{2x\,\sin(y)}_{g(x,y)}\,dx + \underbrace{x^2\cos(y)}_{h(x,y)}\,dy = 0$

Beobachtung:

$F(x,y) = x^2\cdot\sin(y)$ erfüllt die Bez.:

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = 2x\cdot\sin(y) = g(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = x^2\cdot\cos(y) = h(x,y)$$

Also ist:

$$\frac{d}{dt}F(x(t),y(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\dot{y} = 0$$

falls wir $x(t), y(t)$ so wählen, dass gilt:

$$\boxed{F(x,y) = C}$$

Ist noch ein Anfangswert vorgegeben, z. B. $y(1) = \frac{\pi}{4}$, so müssen wir auflösen:

$$x^2\cdot\sin(y) = F(1,\tfrac{\pi}{4}) = C = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(y) = \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \arcsin\frac{1}{x^2\cdot\sqrt{2}} \qquad \left(\text{für } x > \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0{,}840\ldots\right)$$

Def.: Die Dgl. $g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$ heißt (auf einem Gebiet D) exakt, wenn es eine (auf D) diffbare Funktion F gibt mit

$$\frac{\partial F}{\partial x} = g(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = h(x,y).$$

Dann heißt F auch Stammfunktion.

Das totale Differential einer Funktion $F = F(x,y)$ ist:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy$$

Bem.: Also ist eine Dgl. $g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy$ exakt, wenn es ein F gibt, so dass sie in der Form

$$\boxed{dF = 0}$$

geschrieben werden kann.

Satz: Die Fktn. g und h seien im Gebiet D stetig. Ist die Dgl. $g\,dx + h\,dy = 0$ exakt (in D) und ist $F \in C^1(D)$ eine Stammfunktion, so ist das Funktionenpaar $(x(t), y(t)) \in C^1(I)$ (mit Werten in D) genau dann eine Lösung von

$$g(x,y)\,\dot{x} + h(x,y)\,\dot{y} = 0,$$

wenn $F(x(t), y(t))$ im Intervall I konstant ist.

Bew.:

$$g \cdot \dot{x} + h \cdot \dot{y} = F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} = \frac{d}{dt} F(x(t), y(t)).$$

$\square$

Wie erkennt man, ob die Dgl. exakt ist?

<u>Satz:</u> D sei einfach zshg. Gebiet, und g und h seien auf D stetig diffbar. Dann ex. eine Stammfunktion F mit $F_x = g$ und $F_y = h$ genau dann, wenn gilt:

$$\boxed{g_y \equiv h_x} \qquad \text{in ganz } D.$$

(Integrabilitätsbedingung)

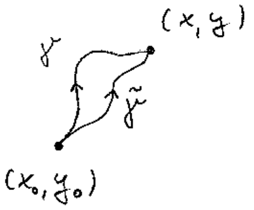
<u>Bew.:</u> "$\Rightarrow$": $F_x = g$, $F_y = h$ impliziert:

$$g_y = (F_x)_y = F_{xy} \overset{(!)}{=} F_{yx} = (F_y)_x = h_x$$

"$\Leftarrow$": Setze $F(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(g(s,r)\,ds + h(s,r)\,dr \right)$

(Kurvenintegral)

(mit $(x_0,y_0) \in D$ fest).



$$\gamma : [0,t] \to D$$
$$\tilde{t} \mapsto \gamma(\tilde{t}) = (\gamma_1(\tilde{t}), \gamma_2(\tilde{t}))$$

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \int_0^t \left(g(\gamma(\tilde{t}))\,\dot{\gamma}_1(\tilde{t}) + h(\gamma(\tilde{t}))\,\dot{\gamma}_2(\tilde{t}) \right) d\tilde{t}$$

Nun sind 2 Dinge zu prüfen:

(1) F ist Stammfunktion

↷ In geeigneter Parametrisierung nachrechnen, z.B. Weg gerade wählen

(2) F hängt nicht vom Weg ab

↷ Dies folgt aus der Bedingung $g_y = h_x$, wenn D einfach zshg. ist!

<u>Details:</u> Heuser 2, Satz 182.2

(1) für einen Fall:

Sei $(x_0, y_0) = (0,0)$, D sternförmig um 0.

Wähle: $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto \gamma(t) = t \cdot (x,y)$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = \int_0^1 \Big(g(tx, ty)\, x + h(tx, ty)\, y \Big)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad F_x(x,y) = \int_0^1 \Big(g_x(tx, ty)\, tx + g(tx, ty) + \underbrace{h_x(tx, ty)}_{= g_y(tx, ty)}\, ty \Big)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} \left[t \cdot g(tx, ty) \right] \right) dt$$

$$= t \cdot g(tx, ty) \Big|_0^1 = g(x,y)$$

Analog: $F_y(x,y) = h(x,y)$

Damit sehen wir, dass die obige Wahl vom Weg γ in der Tat zu einer Stammfunktion führt!

Die Eindeutigkeit (bzw. Wegunabhängigkeit) ist ein Fall für den Satz von Stokes!

$\square$

Bem.: $\int_G d\omega = \int_{\partial G} \omega$ (Satz von Stokes)

Hier: $\gamma_1 - \gamma_2$ geschlossener Weg, umrandet also ein Gebiet G. Mit $\omega = dF$ wird das dann:

$$\int_{\gamma_1-\gamma_2} dF = \int_G \underbrace{ddF}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} dF = \int_{\gamma_2} dF.$$

Was tun, wenn $\omega = g\,dx + h\,dy$ nicht exakt ist?

$\curvearrowright$ Ansatz: $\boxed{\tilde{\omega} := M(x,y)\cdot\omega}$

$\curvearrowright$ Bestimme $M(x,y)$ so, dass $\tilde{\omega}$ exakt wird!

$\curvearrowright$ Hausaufgabe!

⌈ Es muß also gelten: $(Mg)_y = (Mh)_x$,

bzw.:

$$\boxed{M_y\,g + M\,g_y = M_x\,h + M\,h_x}$$ ⌋

(Ex) $2\sin(y)\,dx + x\cos(y)\,dy = 0$

$2\cos y \neq \cos y$ $\curvearrowright$ nicht exakt

$$\underset{\downarrow\atop 0}{M_y}\cdot 2\sin(y) + M\cdot 2\cos(y) \overset{!}{=} M_x \cdot x\cos(y) + M\cdot\cos(y)$$

$\curvearrowright$ $M\cdot\cos(y) = x\cdot M_x\cdot\cos(y)$

$\curvearrowright$ $M = x\cdot M_x$ eine Lösung ist $M = x$

$\curvearrowright$ zurück beim alten Beispiel!