

Lineare Systeme

Lineare Abb. im $\mathbb{R}^n$ schreiben wir als Matrix,
also:

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = A \underline{x}} \quad , \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (A \text{ konstant})$$

Wäre $A=a$ eine (komplexe) Zahl, so wüßten wir schon: $x(t) = x_0 \cdot e^{at} = e^{at} \cdot x_0$

Also wäre doch naheliegend:

$$\boxed{\underline{x}(t) = \exp(t \cdot A) \cdot \underline{x}_0}$$

Was ist $\exp(B)$, wenn B eine Matrix ist?

Versuch:

$$\boxed{\exp(B) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B^m}$$

Also, falls konvergent, $\exp(0) = \mathbb{1}$.

Konvergenz? kein Problem!

Sei $\|\underline{x}\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}^{1/2}$ (Norm im $\mathbb{R}^n$)

Setze

$$\|B\| := \sup_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|B\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \quad (\text{Matrix-Norm zu } \|\cdot\|_2)$$

Lemma: $\|\cdot\|$ ist Norm auf dem VR der reellen $n \times n$ -Matrizen, und es gilt:

$$(1) \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

$$(2) \quad \|A \underline{x}\|_2 \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}\|_2$$

Bew.: Übung!

Satz: Die Reihe $e^B := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B^m$ ist für alle $B \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ absolut konvergent, und es gilt:

- (1) $\exp(B+C) = \exp(B) \cdot \exp(C)$, falls $BC = CB$.
- (2) $\exp(CBC^{-1}) = C \exp(B) C^{-1}$, falls $\det(C) \neq 0$.
- (3) $\exp(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))$.

Bew.: B bel. Matrix, dabei $\|B\| < \infty$.

Dann Majorantenkriterium:

$$\|e^B\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \|B\|^m = e^{\|B\|}$$

$\Rightarrow$ absol. Konvergenz!

Rest: Übung!

Lemma: $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \cdot \exp(tA)$

Bew.: Wegen der Konvergenz dürfen wir rechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\mathbb{1} + tA + \frac{1}{2} t^2 A^2 + \frac{1}{6} t^3 A^3 + \dots + \frac{1}{m!} t^m A^m + \dots \right) \\ = A + tA^2 + \frac{1}{2} t^2 A^3 + \dots + \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} A^m + \dots \\ = A \left(\mathbb{1} + tA + \frac{1}{2} t^2 A^2 + \dots \right) = A \cdot \exp(tA). \end{aligned}$$

□

Satz: Das AWP $\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$, besitzt die eindeutige Lösung

$$\underline{x}(t) = \exp(tA) \cdot \underline{x}_0.$$

Bew.: $\underline{x}(0) = \exp(0 \cdot A) \underline{x}_0 = \mathbb{1} \cdot \underline{x}_0 = \underline{x}_0$ ✓

$$\dot{\underline{x}}(t) = \left(\frac{d}{dt} \exp(tA) \right) \underline{x}_0 = A \cdot \exp(tA) \cdot \underline{x}_0 = A \cdot \underline{x}(t) \quad \checkmark$$

Eindeutigkeit:

Sei $y(t)$ eine Lösung, und setze

$$\underline{z}(t) = \exp(-tA) \cdot y(t).$$

Dann ist $\underline{z}(0) = y(0) = \underline{x}_0$, und

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}}(t) &= \frac{d}{dt} (\exp(-tA) \cdot y(t)) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \exp(-tA) \right) \cdot y(t) + \exp(-tA) \cdot \dot{y}(t) \\ &= -A \cdot \exp(-tA) \cdot y(t) + \exp(-tA) \cdot A \cdot y(t) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{z}(t) \equiv \underline{x}_0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \exp(tA) \cdot \underline{x}_0,$$

$$\text{denn: } \exp(-B) \cdot \exp(B) = \exp(B-B) = \exp(0) = \mathbb{1}.$$

□

Nun kann man vielleicht schon eher glauben, dass vieles ganz wie im 1D geht!

Wie berechnet man $\exp(B)$?

$$(Ex) \quad B = U^{-1} \cdot D \cdot U, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} \exp(B) &= \exp(U^{-1} \cdot D \cdot U) = U^{-1} \cdot \exp(D) \cdot U \\ &= U^{-1} \cdot \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \cdot U \end{aligned}$$

Das ist also ein weiterer Grund, warum man Normalformen und Diagonalisieren von Matrizen lernt!

Nächster Schritt:

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

-7-

In Anlehnung an eine Dimension machen wir den Ansatz:

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right) x_0 \quad (\text{erklären!})$$

Dann ist $x(t_0) = x_0$ und – falls $[A(t), A(s)] = 0$ für alle t, s –

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right) x_0$$

Jetzt werden wir etwas übermütig:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0$$

Wieder gilt: Lösung bekommt man aus einer speziellen Lsg. der inhomogenen Gleichung plus der allg. Lsg. der homogenen Gleichung, plus Einsetzen der Anfangsbed.

↪ Wieder "Variation der Konstanten":

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right) \cdot y(t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{x}(t) &= A(t) \cdot x(t) + \exp(\dots) \cdot \dot{y}(t) \\ &\stackrel{!}{=} A(t) \cdot x(t) + b(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} A(s) ds\right) b(\tau) d\tau$$

Satz: Betrachte das AWP

-8-

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad [A(t), A(s)] = 0 \quad \forall t, s$$

Sind A und b stetig in J , mit $t_0 \in J$, so besitzt das AWP die eindeutige Lösung

$$x(t) = e^{G(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-G(\tau)} b(\tau) d\tau \right)$$

mit

$$G(t) = \int_{t_0}^t A(s) ds.$$

Dies gilt in ganz J .

Bew.: Lösungseigenschaft klar,
Eindeutigkeit folgt aus unserem "konkreten"
P.-L. (später allgemein). $\square$

Wann ist e^A singular? Nie $\forall$

$\rightarrow$ Was ist $\det(e^A)$?

Lemma:

$$\det(e^A) = e^{\text{Spur}(A)}$$

Bew.:

$$A = M J M^{-1}$$

$\nwarrow$ Jordan-Form von A

Damit:

$$e^A = \exp(M J M^{-1}) = M \exp(J) M^{-1}$$

Ist $J = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, so wird

$$\begin{aligned} \det(e^A) &= \det(M \cdot \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \cdot M^{-1}) \\ &= \det(\text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})) \\ &= e^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\text{Spur}(A)} \end{aligned}$$

Jordan-Blöcke: Übung!

$\square$

Warum brauchen wir die Bedingung
 $[A(t), A(s)] = 0, \forall t, s \in J$?

bzw.: Wann gilt die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \exp \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = A(t) \exp \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \quad ?$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=: B(t)}$

$$B(t+\Delta t) - B(t) = \exp \int_{t_0}^{t+\Delta t} A(\tau) d\tau - \exp \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$$

$$= \exp \left(\int_t^{t+\Delta t} A(\tau) d\tau \right) - B(t)$$

$$= \left(\exp \int_t^{t+\Delta t} A(\tau) d\tau - 1 \right) B(t)$$

$$= \exp \left(A_{ij}(\tau_{ij}) \Delta t \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$= 1 + (A_{ij}(\tau_{ij})) \Delta t + O(\Delta t^2)$$

nach MWS der
Integralrechnung,
mit $\tau_{ij} \in (t, t+\Delta t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta t} (B(t+\Delta t) - B(t)) = \left((A_{ij}(\tau_{ij})) + O(\Delta t) \right) B(t)$$

$$\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} A(t) \quad (A \text{ stetig})$$

Also haben wir das

Lemma: Ist $A(t)$ auf $J = [t_0, t_0+a]$ stetig
 und ist $B(t) = \exp \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$, mit $[A(t), A(s)] = 0$
 für alle $t, s \in J$, so gilt

$$\dot{B}(t) = A(t) B(t) = B(t) A(t)$$

für alle $t \in J$. □

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (*)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \underline{f}(\tau, \underline{x}(\tau)) d\tau \quad (**)$$

Satz: (Picard-Lindelöf, vektorwertig)

Betrachte das AWP $(*)$ auf dem Streifen

$$S = \{(t, \underline{x}) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, \underline{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ist $\underline{f}$ auf S stetig mit Lipschitz-Bedingung
 $\|\underline{f}(t, \underline{x}) - \underline{f}(t, \underline{y})\|_2 \leq L \|\underline{x} - \underline{y}\|_2$ auf ganz S ,
 so besitzt das AWP genau eine Lösung. Sie ex.
 im ganzen Intervall $[t_0, t_0 + a]$.

Bem.: • Änderung der Norm ändert die L -Konstante,
 aber nicht die Bedingung. Auf dem $\mathbb{R}^n$
 sind alle Normen äquivalent $\rightarrow$ nur $\|\cdot\|$
 & Normeigenschaften nutzen

• Ziel: BFS für die Abb.

$$\phi : C([t_0, t_0 + a], \mathbb{R}^n) \rightarrow$$

$$(t, \underline{y}) \mapsto \phi(\underline{y})(t) := \underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \underline{f}(\tau, \underline{y}(\tau)) d\tau$$

(FP ist die gesuchte Lösung)

• Geschickte Norm auf $C([t_0, t_0 + a], \mathbb{R}^n)$:

$$\|\underline{y}\|_\alpha := \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + a} \|\underline{y}(t)\|_2 e^{-\alpha t} \quad (\text{mit } \alpha > 0)$$

$\rightarrow$ Ist Norm, liefert vollst. metr. Raum
 (Übung)

Lemma: Auf $[b, c]$ sei $\underline{z}: [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

Dann ist auch $[b, c] \ni t \mapsto \|\underline{z}(t)\|_2 \in \mathbb{R}$ stetig, und es gilt:

$$\left\| \int_b^c \underline{z}(t) dt \right\|_2 \leq \int_b^c \|\underline{z}(t)\|_2 dt$$

Bew.: $\left| \|\underline{z}(t)\|_2 - \|\underline{z}(s)\|_2 \right| \leq \|\underline{z}(t) - \underline{z}(s)\|_2$
also stetig (!).

Integral lässt sich durch Riemann-Summen approximieren, auf die man die Δ -Ungl. anwenden kann (Rest klar - Ana II). $\square$

Bew. (P.-L.):

$$\|(\phi(\underline{x}) - \phi(\underline{y}))(t)\|_2 = \left\| \int_{t_0}^t \underline{f}(\tau, \underline{x}(\tau)) - \underline{f}(\tau, \underline{y}(\tau)) d\tau \right\|_2$$

$$\stackrel{(\text{Lemma})}{\leq} \int_{t_0}^t \|\underline{f}(\tau, \underline{x}(\tau)) - \underline{f}(\tau, \underline{y}(\tau))\|_2 d\tau$$

$$\leq \int_{t_0}^t L \|\underline{x}(\tau) - \underline{y}(\tau)\|_2 (e^{-\alpha\tau} \cdot e^{\alpha\tau}) d\tau$$

$$\leq L \|\underline{x} - \underline{y}\|_\alpha \int_{t_0}^t e^{\alpha\tau} d\tau = L \|\underline{x} - \underline{y}\|_\alpha \frac{e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0}}{\alpha}$$

$$\leq L \cdot \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \|\underline{x} - \underline{y}\|_\alpha$$

$$\forall t \Rightarrow \|\phi(\underline{x})(t) - \phi(\underline{y})(t)\|_2 e^{-\alpha t} \leq \frac{L}{\alpha} \|\underline{x} - \underline{y}\|_\alpha$$

$$\Rightarrow \|\phi(\underline{x}) - \phi(\underline{y})\|_\alpha \leq \frac{L}{\alpha} \|\underline{x} - \underline{y}\|_\alpha$$

$\forall \alpha = 2L$ macht ϕ zur Kontraktion $\xRightarrow{\text{BFS}}$ Beh. $\square$

Bem.: Analog zu 1D gilt auch hier:

- $\exists$ Picard-Iteration
- lokal Lipschitz $\Rightarrow$ lokal eind. Lösbarkeit
- $\nexists$ "nur" stetig $\nrightarrow$ Peano Existenzsatz

$$(Ex) \quad \dot{\underline{x}} = A \underline{x}, \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$\nrightarrow \underline{x}(t) = \underline{x}_0 + \int_0^t A \underline{x}(\tau) d\tau = \phi(\underline{x})(t)$$

$$\underline{x}^{(0)} \equiv \underline{x}_0, \quad \underline{x}^{(n+1)} = \phi(\underline{x}^{(n)})$$

$$\underline{x}^{(1)}(t) = \underline{x}_0 + \int_0^t A \underline{x}_0 d\tau = \underline{x}_0 + t A \underline{x}_0 = (\mathbb{1} + tA) \underline{x}_0$$

$$\begin{aligned} \underline{x}^{(2)}(t) &= \underline{x}_0 + \int_0^t A \underline{x}_0 d\tau + \int_0^t \tau A^2 \underline{x}_0 d\tau \\ &= \underline{x}_0 + t A \underline{x}_0 + \frac{t^2}{2} A^2 \underline{x}_0 = \left(\mathbb{1} + tA + \frac{1}{2} t^2 A^2 \right) \underline{x}_0 \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\underline{x}^{(n)}(t) = \left(\sum_{m=0}^n \frac{t^m}{m!} A^m \right) \underline{x}_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{tA} \underline{x}_0$$

Folgerung:

Die Funktion $t \mapsto e^{tA}$ (matrixwertig) ist die eindeutige Lösung des AWP

$$\boxed{\dot{E} = A \cdot E, \quad E(0) = \mathbb{1}}$$

Bew.: Betr. das Ex. mit $\underline{x}_0 \in \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ und setze spaltenweise zu einer Matrix zusammen (!)

□