Dglen n-ter Ordnung

(Ex) $\boxed{\ddot{x} + a \cdot \dot{x} + b \cdot x = 0}$

(z. B. Schwingungsgl. mit oder ohne Dämpfung)

zunächst: a, b konstant

AWP: $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$

Lösung z. B. durch Umwandlung in ein System erster Ordnung.

Alternative: direkt!

Ansatz: $\boxed{x(t) = e^{\omega t}}$ (Euler)

Eins.
$\Rightarrow \quad \omega^2 \cdot x + a\omega x + bx = 0$

Da $x \not\equiv 0$ sein wird (und sein soll!), muss also gelten:

$$\omega^2 + a\omega + b = 0$$

bzw.: $$\omega = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Es ist offenbar zweckmäßig, die Diskriminante $\Delta = a^2 - 4b$ zu beachten.

Damit wird nun

(1) $\boxed{\Delta > 0}$

$\Rightarrow \quad \omega_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{\Delta}\right)$: 2 reelle Lsg.

↝ Superpositionsprinzip liefert:

$$x(t) = c_1\, e^{\omega_1 t} + c_2\, e^{\omega_2 t}$$

Anfangsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{array}\right\} \text{ legen } c_{1,2} \text{ fest}$$

(2) $\boxed{\Delta < 0}$

$\Rightarrow \quad \omega_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-a \pm i\sqrt{-\Delta}\right)$: komplex!
(k.-konj. Paar)

↝ $\quad x(t) = c_1\, e^{\omega_1 t} + c_2\, e^{\omega_2 t}$

Das ist auch komplex!

Beachte aber:

- $e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{\alpha} \cdot (\cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta))$
- $x(t) = u(t) + i \cdot v(t)$
- $\mathrm{Re}(x(t))$, $\mathrm{Im}(x(t))$ lösen auch die Dgl.

Eine andere Form der Lösung ist damit:

$$x(t) = \tilde{c}_1\, e^{\alpha t} \cos\beta t + \tilde{C}_2\, e^{\alpha t} \sin\beta t$$

mit $\alpha \pm i\beta = \omega_{1,2}$.

(3) $\boxed{\Delta = 0}$

$\Rightarrow \quad \omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2} a$: eine reelle Lsg. !

Sei $\omega = -a/2$. Dann ist $e^{\omega t}$ eine Lösung.
Doch woher die 2. Lsg. nehmen ?

Ansatz:

$x(t) = t \cdot e^{\omega t}$

Dann ist (beachte $2\omega + a = 0$):

$$\dot{x}(t) = e^{\omega t} + \omega \cdot x(t)$$
$$\ddot{x}(t) = \omega \cdot e^{\omega t} + \omega \cdot \dot{x}(t)$$

Also

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + a\dot{x} + bx \\ &= \ddot{x} - 2\omega\dot{x} + \omega^2 x \\ &= \omega e^{\omega t} + \omega\dot{x} - 2\omega\dot{x} + \omega^2 x \\ &= \omega e^{\omega t} - \omega e^{\omega t} - \omega^2 x + \omega^2 x = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

$\leadsto$ Superpositionsprinzip liefert:

$$x(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 t e^{\omega t}$$

Dies korrespondiert zu dem Fall, dass man bei Matrixschreibweise nicht auf Diagonalgestalt, sondern auf Jordan-Form kommt!

allgem. Fall mit $\Delta = 0$

(Ex) $\ddot{x} + a\dot{x} + \frac{1}{4}a^2 x = 0$, $\Delta = a^2 - a^2 = 0$

$x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ $\curvearrowright$ $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a^2}{4} & -a \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} tr(A) = -a \\ det(A) = \frac{1}{4}a^2 \end{array}\right\}$ Ew. $\lambda = -\frac{a}{2}$ mit <u>algebr.</u> Mult. 2

<u>Geom.</u> Mult. 1 : $V_\lambda = \{x : Ax = \lambda x\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -a/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A \sim J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ <u>zyklisch</u>:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -a/2 \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} = -1 \curvearrowright \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} \right\}$ Basis

char. Polynom = Minimalpolynom: $\left(\lambda + \frac{a}{2}\right)^2$

Dabei:

$\begin{pmatrix} 1 \\ -a/2 \end{pmatrix} e^{-\frac{a}{2}t} \hat{=} e^{-\frac{a}{2}t}$ (da $\frac{d}{dt} e^{-\frac{1}{2}at} = -\frac{a}{2} e^{-\frac{1}{2}at}$)

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -a/2 \end{pmatrix}\right) e^{-\frac{a}{2}t} \hat{=} t \cdot e^{-\frac{a}{2}t}$

(da $\frac{d}{dt} t e^{-\frac{a}{2}t} = e^{-\frac{a}{2}t} - t\frac{a}{2} e^{-\frac{a}{2}t}$)

Fassen wir zusammen:

<u>Folgerung:</u> Das AWP

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0$$

besitzt genau eine (reelle) Lösung.

<u>Bew.:</u> Obige Rechnung;
Folgt auch aus Picard-Lindelöf (wie?)
□

Jetzt: Inhomogen.

$$(*) \quad \boxed{\ddot{x} + a\cdot\dot{x} + b\cdot x = s(t)} \qquad a, b \text{ konstant.}$$

<u>Prop.:</u> Allg. Lsg. von $(*)$ =
partikuläre Lsg. von $(*)$
+ allg. Lsg. der hom. Gl.

<u>Bew.:</u> Wie immer: y, z Lsg. von $(*)$
$\Rightarrow$ $y - z$ Lösung der hom. Gl.
□

Wie verschaffen wir uns eine spez. Lsg.?
$\rightsquigarrow$ "Variation der Konstanten".
Hier soll nur das Ergebnis angegeben werden, das man nachrechnen möge ($\rightarrow$ Übung)

Dazu setzen wir:

$$P(x) = x^2 + ax + b$$ (char. Polynom der Gleichung)

(1) P besitzt Nullstellen $\omega_1 \neq \omega_2$ (reell oder kompl.)

Dann ist:

$$x_p(t) = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left(e^{\omega_1 t} \int_{t_0}^{t} e^{-\omega_1 \tau} s(\tau)\, d\tau - e^{\omega_2 t} \int_{t_0}^{t} e^{-\omega_2 \tau} s(\tau)\, d\tau \right)$$

Diese Lösung ist reell (auch wenn $\omega_2 = \bar{\omega}_1$) !

(2) P besitzt doppelte Nullstelle (reell !) ω.

Dann ist:

$$x_p(t) = e^{\omega t} \left(t \int_{t_0}^{t} e^{-\omega \tau} s(\tau)\, d\tau - \int_{t_0}^{t} \tau\, e^{-\omega \tau} s(\tau)\, d\tau \right)$$

<u>Satz:</u> Ist $s(t)$ stetig auf dem Intervall J, so besitzt das AWP

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = s(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0$$

mit $t_0 \in J$ und $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung auf ganz J.

<u>Bew.:</u> Folgt wieder aus obiger Rechnung durch Einsetzen, oder (abstrakter) aus Picard-Lindelöf. □

(Ex) $s(t) = A \cdot \cos \varrho t$, $s(t) = A \cdot \sin \varrho t$ $(A, \varrho \neq 0)$

Das können wir in einem Rutsch behandeln:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = A e^{i\varrho t}$$
$$= A(\cos \varrho t + i \cdot \sin \varrho t)$$

Dann geben Real- (Imaginär-)teil die beiden Fälle !

Ansatz für die part. Lösung (hier einfach!):

$$x_p(t) = B\, e^{i\varrho t}$$

$$\Rightarrow \quad P(i\varrho)\, B\, e^{i\varrho t} = A\, e^{i\varrho t} \qquad \text{(P wie oben, also } x^2+ax+b\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad P(i\varrho)\, B = A$$

(1) $P(i\varrho) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad B = A / P(i\varrho)$ ✓

(2) $P(i\varrho) = 0$: neuer Ansatz:

$$x_p(t) = B \cdot t \cdot e^{i\varrho t}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{P(i\varrho)}_{=0} \cdot B\, t\, e^{i\varrho t} + (2i\varrho + a)\, B\, e^{i\varrho t} = A\, e^{i\varrho t}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{A}{a + 2i\varrho}$$ ✓

Aber: B ist komplex, man muss also noch den Real- (Imaginär)teil von $x_p(t)$ bilden. Der hat die Form:

$$x_p(t) = \begin{cases} B_1 \cos \varrho t + B_2 \sin \varrho t, & P(i\varrho) \neq 0 \\ B_1\, t \cos \varrho t + B_2\, t \sin \varrho t, & P(i\varrho) = 0 \end{cases}$$

Kleine Übung: Man verwende obige Lösungsformeln, um zum selben Resultat zu gelangen!

<u>Allgemein:</u> n-ter Ordnung

$$(\circledast)\quad \boxed{x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0} \qquad (a_i \in \mathbb{R})$$

Es gilt wieder das <u>Superpositionsprinzip:</u>

x, y Lsg. $\Rightarrow$ $\alpha x + \beta y$ auch Lsg.

<u>Def.:</u> $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ heißt <u>charakteristisches Polynom</u> von $\circledast$.

Sei nun $D := \frac{d}{dt}$, und $D^k := \frac{d^k}{dt^k}$, so dass $D^k x = \frac{d^k}{dt^k} x = x^{(k)}$ (Ableitungsoperator).

<u>Lemma:</u> u, v seien diffbar. Dann ist

$$D(\alpha u + \beta v) = \alpha D(u) + \beta D(v),$$

d.h.: D ist ein <u>linearer</u> Operator.

<u>Bew.:</u> klar! $\square$

Nun werden wir mutig, und setzen D in P ein, also:

$$P(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 \cdot \mathrm{Id}$$

Damit ist dann ein <u>Operator</u> gemeint, und zwar:

$$P(D)\, u = u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{u} + a_0 u$$

$\Rightarrow$ Neue Schreibweise für $\circledast$:

$$\boxed{P(D)\, x = 0}$$

Ansatz: $y(t) = e^{\omega t}$

Lemma: $P(D)\,y = 0 \iff P(\omega) = 0$

Bew.: Einsetzen und beachten:

$$\frac{d^k}{dt^k}\, y(t) = \omega^k \cdot y(t).$$

Also: $P(D)\,y = 0 \iff P(\omega) \cdot y = 0$

$\iff P(\omega) = 0$, da $y \neq 0$. □

Dieser Ansatz wandelt also eine Dgl. (linear, konst. Koeffizienten) in eine algebraische Gl. um (Nullst. von Polynomen).
Später macht man das systematisch mit der Fourier-Transformation.

Nun gilt:

Satz: $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$
mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und $m_1 + \ldots + m_r = n$.
Dabei können die λ_i komplex sein.
Die Darstellung ist (bis auf die Reihenfolge) eindeutig!

Bew.: Dies ist der Fundamentalsatz der Algebra! □

Wie sehen nun die Lösungen aus?

<u>Satz:</u> Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die (paarw. verschiedenen) Nullstellen von $P(\lambda)$, mit Vielfachheiten m_k. Dann lautet die allg. Lsg.:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{\ell=0}^{m_k-1} c_{k\ell}\, t^{\ell} \right) e^{\lambda_k t}$$

mit bel. Zahlen $c_{k,\ell} \in \mathbb{C}$.

<u>Bew.:</u> Es genügt, zu zeigen:

$$(\lambda - \lambda_k)^m \mid P(\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad P(D) \left(\sum_{\ell=0}^{m-1} c_\ell \cdot t^{\ell} \cdot e^{\lambda_k t} \right) = 0$$

Wegen der Linearität des Operators müssen wir nur zeigen:

$$P(D) \left(t^{\ell} e^{\lambda_k t} \right) = 0 \,, \qquad \text{für } 0 \le \ell \le m-1.$$

Das geht so:

$$P(D) \left(t^{\ell} e^{\lambda t} \right)\Big|_{\lambda=\lambda_k} = P(D) \left(\frac{d^{\ell}}{d\lambda^{\ell}} e^{\lambda t} \right)\Big|_{\lambda=\lambda_k}$$

$$= \frac{d^{\ell}}{d\lambda^{\ell}} \Big(P(D) \left(e^{\lambda t} \right) \Big)\Big|_{\lambda=\lambda_k} \qquad (!)$$

$$= \frac{d^{\ell}}{d\lambda^{\ell}} \left(e^{\lambda t} \cdot P(\lambda) \right)\Big|_{\lambda=\lambda_k} = 0 \,,$$

denn $P(\lambda_k) = P'(\lambda_k) = \dots = P^{(m-1)}(\lambda_k) = 0$ nach Vor.!

Damit haben wir genug Funktionen — wenn sie auch linear unabhängig sind!

Betrachte also:

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^{r} p_j(t) \cdot e^{\lambda_j t}, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j,$$

mit p_j ein Polynom vom Grad $m_j - 1$.

Zu zeigen: $\phi(t) \equiv 0 \Rightarrow p_j(t) \equiv 0$ für alle j.

⇝ Induktion über r:

- Für $r = 1$ ist das klar, weil $e^{\lambda t} \not\equiv 0$.
- Angenommen, es stimmt für r.
- Betrachte:

$$\sum_{j=1}^{r+1} p_j(t)\, e^{\lambda_j t} = 0$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{r} p_j(t)\, e^{\lambda_j t} \right) + p_{r+1}(t) e^{\lambda_{r+1} t}$$

$$\Rightarrow \quad p_{r+1}(t) = - \sum_{j=1}^{r} p_j(t) \cdot e^{(\lambda_j - \lambda_{r+1}) t}$$

Polynom $\uparrow$ $\qquad$ $\uparrow$ Terme mit e-Funktionen $\not\equiv 1$.

Das geht nur, wenn $p_{r+1}(t) = 0$ ist; also auch r. S. $= 0 \Rightarrow$ alle $p_j(t) = 0$ nach Ind.-Ann.

$\Rightarrow$ Beh.

$\square$

Bem.: Den letzten Schritt kann man formal ausführen, indem man beide Seiten m_{r+1}-mal ableitet – dann muss "$0 = 0$" übrig bleiben!

(Details: Übung!)

Geänderte Strategie:

Bei linearen (Systemen) von Dglen. bestimmen wir zunächst einen maximalen Satz linear unabhängiger Lösungen, und passen die Anfangsbed. hinterher an.

Def.: Betrachte eine lineare Dgl. n-ter Ordnung, oder ein lineares System von n Gleichungen erster Ordnung.
Eine Kollektion von n linear unabhängigen Lsg. der Dgl. heißt dann Fundamentalsystem.

(Ex) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (\omega \neq 0)$

FUSY: $\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$

(Ex) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = x$ also $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

FUSY: $\left\{ \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \right\}$

Wie erkennt man lineare Abhängigkeit von Vektoren? $\to$ Determinante!
(Wdh.: S. 12, voriges Kap.)

Betrachten wir nun wieder Systeme:

$\boxed{\dot{\underline{x}} = A(t)\,\underline{x}}$ (Dim.: n)

Ein spezielles FUSY entsteht so:

$\underline{x}_j(t)$ Lsg., mit $\underline{x}_j(t_0) = \underline{e}_j$,

also: $X(t) = (\underline{x}_1(t), \underline{x}_2(t), \dots, \underline{x}_n(t))$,

$$\boxed{\dot{X}(t) = A(t)\,X(t), \quad X(t_0) = \mathbb{1}}$$

Lemma: $\dot{\underline{x}} = A(t)\,\underline{x}$, $\underline{x}(t_0) = \underline{a}$ (AWP)

wird gelöst von

$$\underline{x}(t) = X(t)\,\underline{a}.$$

Bew.: Nachrechnen!

Folgerung: Ist $Y(t)$ eine Matrix von Lösungen (= jede Spalte ist Lösung), so gilt:

$$Y(t) = X(t) \cdot Y(t_0).$$

Bew.: Nachrechnen: $Y(t_0) = X(t_0)\,Y(t_0) = \mathbb{1} \cdot Y(t_0) = Y(t_0)$

$$\dot{Y}(t) = \dot{X}(t)\,Y(t_0) = A(t)X(t)Y(t_0) = A(t)\,Y(t)$$

Dies gestattet uns nun, eine Methode zur Erkennung von FUSY's einzuführen (aber leider noch nicht die Berechnung der $X(t)$).