Betrachte: $\boxed{\underline{\dot{x}} = A(t)\,\underline{x}}$ ⊛ (System)

$\llcorner$ $n\times n$ - Matrix

Def.: Sind $\underline{z}_1(t), \dots, \underline{z}_n(t)$ n Lösungen von ⊛, so heißt

$$W(t) := \det(\underline{z}_1(t), \dots, \underline{z}_n(t)) = \det(Z(t))$$

die zug. Wronski-Determinante.

Ex $\dot{x} = y, \ \dot{y} = x$ (s.o.):

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2.$$

Satz: Ist $A(t)$ im Intervall J stetig, so erfüllt $W(t)$ selber die Dgl.

$$\boxed{\dot{W}(t) = \operatorname{Spur}(A(t)) \cdot W(t)}$$

(mit $\operatorname{Spur}(A) = \sum_j a_{jj}$), also ist

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur}(A(\tau))\, d\tau \right).$$

Bew.: Man rechnet nach, mit Produktregel und Def.:

$$\det(X(t))^{\bullet} = \sum_{j=1}^{n} \det(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{j-1}, \underline{\dot{x}}_j, \underline{x}_{j+1}, \dots, \underline{x}_n) \quad (\,!\,)$$

$(\underline{x}_i(t_0) = \underline{e}_i)$

$$= \sum_{j=1}^{n} \det(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{j-1}, A(t)\underline{x}_j, \underline{x}_{j+1}, \dots, \underline{x}_n)$$

Also:

$$\frac{d}{dt} \det(X(t))\Big|_{t=t_0} = \sum_{j=1}^{n} \det(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{j-1}, \overbrace{A(t_0)\underline{e}_j}^{= \sum_{i=1}^{n} \underline{e}_i a_{ij}(t_0)}, \underline{e}_{j+1}, \dots, \underline{e}_n)$$

$$\overset{(!)}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(t_0) = \operatorname{Spur}(A(t_0))$$

Nun ist weiter:

$$\dot{W}(t) = \frac{d}{dt} \det(Z(t)) = \frac{d}{dt} \det(X(t)\, Z(t_0))$$

$$= \left(\frac{d}{dt} \det(X(t))\right) \cdot W(t_0)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{W}(t_0) = \operatorname{Spur}(A(t_0)) \cdot W(t_0)$$

Da $t_0 \in J$ bel. war, folgt die Dgl. – und die Lösung kennen wir von früher! $\square$

<u>Folgerung:</u> Entweder ist $W(t) \equiv 0$, oder überall $\neq 0$ in J. Insbesondere bilden die Funktionen $\{ z_1(t), \ldots, z_n(t) \}$ ein FUSY $\Leftrightarrow$ $W(t) \neq 0$.

$\square$

Wie sieht das bei einer Dgl. n-ter Ordnung aus? Also:

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, \dot{x} + a_0(t)\, x = 0$$

Lösungen: $\{ z_1(t), \ldots, z_n(t) \}$ (<u>skalare</u> Fktn.)

$$\Rightarrow \quad W(t) := \begin{vmatrix} z_1(t) & \ldots & z_n(t) \\ \dot{z}_1(t) & & \dot{z}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-1)}(t) & & z_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

(klar, gemäß "Umwandlungstrick").

Ex $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $\{ \cos(\omega t), \sin(\omega t) \}$, $\omega \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cdot \cos(\omega t) \end{vmatrix} = \omega\,(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) = \omega$$

$$\boxed{\dot{x} = A(t)\,x + b(t)}\,, \quad x(t_0) = x_0$$

(1) Homogen: $\dot{x} = A(t)\,x$

Sei $X(t)$ das FUSY (spaltenweise) mit $X(t_0) = \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ $x(t) = X(t)\,x_0$ ist unsere Lösung (s. S. 13)

(2) Inhomogen: $\dot{x} = A(t)\,x + b(t)$

$$x_p(t) = X(t)\,y(t)$$

$$\dot{x}_p(t) = \dot{X}(t)\,y(t) + X(t)\,\dot{y}(t)$$

$$= A(t)\,x_p(t) + X(t)\,\dot{y}(t) \overset{!}{=} A(t)\,x_p(t) + b(t)$$

$$\Rightarrow \quad X(t)\,\dot{y}(t) = b(t)\,, \quad \det(X(t)) \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{y}(t) = X(t)^{-1}\,b(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau)^{-1}\,b(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = X(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau)^{-1}\,b(\tau)\,d\tau\right)$$

Fazit: Mit der Kenntnis des richtigen FUSY's ($X(t_0) = \mathbb{1}$) bekommen wir die (allgemeine) Lösung des inhomogenen Problems.

Problem: Wie bekommen wir $X(t)$?

$$\curvearrowright \quad \boxed{\dot{X}(t) = A(t)\,X(t)\,, \quad X(t_0) = \mathbb{1}}$$

(matrixwertiges AWP)

Zwischenüberlegung: e^{A+B} mit $[A,B] \neq 0$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$
$$= A^2 + 2AB + B^2 - [A,B]$$

$$(A+B)^3 = \dots = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$
$$- A[A,B] - [A,B]B - [A^2,B] - [A,B^2]$$

Lemma (Weyl):

Falls $[A,[A,B]] = 0 = [B,[A,B]]$, so gilt:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$
$$= e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} = e^{\frac{1}{2}[A,B]} e^{A+B}.$$

Bew.: Die 2. & 3. Identität sind klar.

Die 1. Gl. ist ein Spezialfall der BCH-Formel (s.u.) □

Satz: (BCH - Formel)

Für $A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ gilt:

$$e^{tA} e^{tB} = \exp\Big(t(A+B) + \frac{t^2}{2}[A,B]$$
$$+ \frac{t^3}{12}\big([A,[A,B]] - [B,[A,B]]\big) + O(t^4)\Big),$$

wobei $O(t^4)$ auch als unendl. Reihe in iterierten Kommutatoren geschrieben werden kann.

Bew.: Taylor-Reihe! Sei $\boxed{M(t) = e^{tA} e^{tB}}$

Dann ist $M(0) = \mathbb{1}$, $\dot{M}(t) = A\,M(t) + M(t)\,B$,

also $\dot{M}(0) = A + B = \frac{d}{dt}(\text{r.S.})\Big|_{t=0}$

$\ddot{M}(t) = A^2 M(t) + 2\,A\,M(t)\,B + M(t)\,B^2$,

also $\ddot{M}(0) = A^2 + 2AB + B^2$, zu vergleichen mit

$\frac{d^2}{dt^2}(\text{r.S.})\Big|_{t=0} = \ldots = (A+B)^2 + [A,B]$ ✓ etc

(nächster Term: Übung) □

Verwandte Relationen:

- $\log(e^A e^B) = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}\left([A,[A,B]] - [B,[A,B]]\right)$
  $- \frac{1}{24}[B,[A,[A,B]]] + \ldots$ (Dynkin, 1947)
- $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{1}{2}t^2[A,B]} e^{\frac{1}{6}t^3(\ldots)} \cdot \ldots$ (Zassenhaus)
- $e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]]$
  $+ \frac{1}{6}[A,[A,[A,B]]] + \ldots$ (Hadamard)
- $\boxed{e^{A+B} = \lim_{m\to\infty}\left(e^{A/m} e^{B/m}\right)^m}$

Trotter'sche Produktformel

Dabei gilt: $|||\, e^{A+B} - (e^{A/m} e^{B/m})^m \,|||_2$
$\leq \frac{1}{2m} |||\,[A,B]\,|||_2 \exp\left(|||A|||_2 + |||B|||_2\right)$

Lit. C. Moler & C. van Loan,
Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, 25 years later,
SIAM Review 45 (2003) 3–49.