

Peano - Baker - Reihe

(für $\mathbb{R}^d$
bzw. $\mathbb{C}^d$)

$$\dot{x} = A x + b, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in J \ni t_0$$

← stetig

Wdh.: Wenn $[A(t), A(s)] = 0$ für alle $t, s \in J$,

so ist

$$x(t) = \underbrace{\exp \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau}_{X(t, t_0)} \left(x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^t \exp \left(- \int_{t_0}^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right) b(\tau) d\tau}_{X(\tau, t_0)^{-1}} \right)$$

FASY mit $X(t_0, t_0) = \mathbb{1}$

$$A(t) \equiv A \quad \Rightarrow \quad X(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$$

Im allgemeinen Fall erfüllt $X(t, t_0)$ die
Volterra - Gleichung

$$X(t, t_0) = \mathbb{1} + \int_{t_0}^t A(\tau) X(\tau, t_0) d\tau, \quad X(t_0, t_0) = \mathbb{1}$$

(als Lsg. der homogenen Gleichung).

Jetzt probieren wir eine (formale) Picard-Iteration
und bekommen

$$\begin{aligned} X(t, t_0) &= \mathbb{1} + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \\ &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(t) \end{aligned}$$

mit

$$I_n(t) = \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} A(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_2 d\tau_1$$

Strategie: Rigoros machen,
Konvergenz zeigen

Definieren wir die Iteration

$$\boxed{I_0(t) \equiv \mathbb{1}, \quad I_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t A(\tau) I_n(\tau) d\tau \quad (n \in \mathbb{N}_0)}$$

Da A auf J stetig, $t_0, t \in J$, ist sie wohldefiniert, und es gilt $I_n(t_0) = \delta_{n,0} \mathbb{1}$, was zu $X(t_0, t_0) = \mathbb{1}$ passt.

Lemma: Ist A stetig auf J , so sind die Matrix-Funktionen diffbar und erfüllen

$$\boxed{\dot{I}_{n+1}(t) = A(t) I_n(t)} \quad \text{für } t \in J, n \in \mathbb{N}_0$$

Bew.: Per Induktion ist klar, dass $I_n(t)$ (elementweise) stetig ist, also auch $t \mapsto A(t) I_n(t)$, und $I_{n+1}(t)$ ist (elementweise) diffbar (nach "Hauptsatz Infini"), mit stetiger Ableitung. Dabei

$$\begin{aligned} I_{n+1}(t + \Delta t) - I_{n+1}(t) &= \int_t^{t+\Delta t} \underbrace{A(\tau) I_n(\tau)}_{M(\tau)} d\tau \\ &= \Delta t \cdot \left(M_{ij}(\tau_{ij}) \right)_{ij} \quad \text{mit } \tau_{ij} \in (t, t + \Delta t), \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{\Delta t} (I_{n+1}(t + \Delta t) - I_n(t)) \xrightarrow{\Delta t \searrow 0} M(t) = A(t) I_n(t).$$

□

Was nun fehlt ist die Konvergenz. Dazu müssen wir etwas annehmen.

Lemma: Ist A stetig auf J , mit $[A(t), A(s)] = 0$ für alle $t, s \in J$, so gilt

$$I_n(t) = \frac{1}{n!} \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^n$$

für $t \in J$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere gilt dies für $d=1$.

Bew.: Stimmt für $n=0$ und $n=1$. Induktion:

$$I_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t A(s) I_n(s) ds$$

$$= \int_{t_0}^t A(s) \frac{1}{n!} \left(\int_{t_0}^s A(\tau) d\tau \right)^n ds$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{d}{ds} \left(\int_{t_0}^s A(\tau) d\tau \right)^{n+1}$$

stimmt wegen der Annahme!

(Bew. analog zu früher)

$$= \frac{1}{(n+1)!} \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} \left(\int_{t_0}^s A(\tau) d\tau \right)^{n+1} ds$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^{n+1} \Rightarrow \text{Beh.} \quad \square$$

Bem.: • Falls $[A(t), A(s)] = 0$ auf J , reduziert sich die PB-Reihe auf

$$X(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^n = \exp \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) \quad \checkmark$$

• In Lemma reicht auch die Bedingung

$$\left[A(t), \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] = 0 \quad (\text{hilft aber nicht})$$

Sei nun $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ (bzw. $\mathbb{C}^d$), und $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ die zugehörige Matrixnorm, also $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ und $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Satz: Ist $\|A(t)\|$ lokal integrierbar auf J , so konvergiert die PB-Reihe für $X(t, t_0)$ kompakt auf J bzgl. $\|\cdot\|$.

Bew.: $t \mapsto \|A(t)\|$ ist stetig bei unseren Voraussetzungen, also sicher lokal integrierbar.

Nun weisen wir eine Cauchy-Eigenschaft nach:

$$\left\| \sum_{k=0}^n I_k(t) - \sum_{k=0}^m I_k(t) \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n I_k(t) \right\| \quad (\text{o.B.d.A. } n > m)$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^n \|I_k(t)\| \quad (\text{Def. einsetzen})$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^n \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \dots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} \|A(\tau_1) \dots A(\tau_k)\| d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1$$

$$\leq \|A(\tau_1)\| \cdot \dots \cdot \|A(\tau_k)\|$$

(hier hilft unser Lemma!)

$$\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{t_0}^t \|A(\tau)\| d\tau \right)^k$$

Aber dies ist die Cauchy-Abschätzung für $\exp\left(\int_{t_0}^t \|A(\tau)\| d\tau\right)$, was bekanntlich auf ganz $\mathbb{R}$ kompakt konvergiert $\Rightarrow$ Beh. $\square$

Also haben wir eine Formel für $X(t, t_0)$, mit $\det(X(t, t_0)) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(\tau)) d\tau\right) \neq 0$

(nach dem Satz über die Wronsky-Det.), und wir können auch die inhomogene Gleichung lösen, mittels $X(t, t_0)^{-1}$ (s.o.). Aber was ist diese Inverse?

Prop.: Sei $X(t, t_0)$ für $t, t_0 \in J$ das FUSY für $\dot{x} = Ax$ mit $X(t_0, t_0) = \mathbb{1}$, wobei $t \mapsto A(t)$ stetig auf J sei. Dann gilt

$$X(t, s) X(s, t_0) = X(t, t_0), \quad \forall t, s, t_0 \in J.$$

Bew.: $x(s) = X(s, t_0) x_0$ kann einfach als Anfangsbedingung bei $t_0' = s$ dienen. Wegen P.-L. löst dann $x(t) = X(t, s) X(s, t_0) x_0$ das AWP mit $x(t_0) = x_0$, muss also $x(t) = X(t, t_0) x_0$ sein. Dabei darf auch $t < t_0$ sein etc. $\xrightarrow{x_0 \text{ bel.}} \Rightarrow$ Beh. $\square$

Bem.: Dies ist die Fluss-Eigenschaft des DGL-Systems (gilt allgemeiner!)

Folgerung:

$$X(t, t_0)^{-1} = X(t_0, t)$$

Bew.:

$$X(t, t) \equiv \mathbb{1}$$

Nach der Prop. gilt aber

$$X(t, s) X(s, t) = X(t, t)$$

$$\Rightarrow X(s, t) = X(t, s)^{-1} \Rightarrow \text{Beh.} \quad \square$$

Folgerung:

Sei $X(t, s)$ das FUSY für $\dot{x} = Ax$, mit $t, s \in J$ und $X(t, t) = \mathbb{1}$, ausgedrückt durch die zug. PB-Reihe. Dann ist die Lösung des AWP $\dot{x} = Ax + b$ mit $x(t_0) = x_0$ gegeben durch

$$x(t) = X(t, t_0) \left(x_0 + \int_{t_0}^t X(t_0, \tau) b(\tau) d\tau \right).$$

Für kommutierende Matrix-Familien reduziert sich dies auf die üblichen Ausdrücke mit Matrix-Exponentialen. $\square$

(Ex) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{bzw. } \ddot{y} = aty, a > 0)$

Mit $\alpha = \sqrt[3]{a}$ bekommt man

$$X(t, 0) = \begin{pmatrix} \dot{f}(\alpha t) & \alpha^{-2} f(\alpha t) \\ \alpha^2 g(\alpha t) & f(\alpha t) \end{pmatrix}$$

$$(\beta)_k = \beta(\beta+1) \cdots (\beta+k-1)$$

$$\text{und } \lim_{a \rightarrow 0} X(t, 0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k \left(\frac{1}{3}\right)_k}{(3k)!} \frac{z^{3k}}{3^k}$$

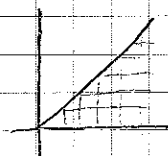
$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k \left(\frac{2}{3}\right)_k}{(3k+1)!} \frac{z^{3k+1}}{3^k}$$

(nachrechnen!)

Wie weit geht die Verbindung zu "exp(...)"?

Betrachte:

$$\begin{aligned}
 I_2(t) &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_1) A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \quad (\text{stets: } \tau_1 \geq \tau_2) \\
 &= \int_{t_0}^t \int_{\tau_2}^t A(\tau_1) A(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \int_{t_0}^t \int_{\sigma_1}^t A(\sigma_2) A(\sigma_1) d\sigma_2 d\sigma_1
 \end{aligned}$$



Definieren wir $\boxed{:A(t) A(s):} = \begin{cases} A(t) A(s) & , t \geq s \\ A(s) A(t) & , s > t \end{cases}$
so folgt:

$$\begin{aligned}
 I_2(t) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \underbrace{A(\tau_1) A(\tau_2)}_{=: A(\tau_1) A(\tau_2):} d\tau_2 d\tau_1 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{\tau_1}^t \underbrace{A(\tau_2) A(\tau_1)}_{=: A(\tau_1) A(\tau_2):} d\tau_2 d\tau_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t :A(\tau_1) A(\tau_2): d\tau_2 d\tau_1
 \end{aligned}$$

Def.: $:A(t) A(s):$ heißt das zeitgeordnete Produkt von $A(t)$ und $A(s)$. Analog setzt man

$$\boxed{:A(t_1) A(t_2) \dots A(t_n):}$$

$$:= A(t_{\pi(1)}) A(t_{\pi(2)}) \dots A(t_{\pi(n)})$$

für eine legal welche!) Permutation π mit
 $t_{\pi(1)} \geq t_{\pi(2)} \geq \dots \geq t_{\pi(n)}$

Lemma: Es gilt (für $n \geq 2$):

$$I_n(t) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \cdots \int_{t_0}^t :A(\tau_1) \cdots A(\tau_n): d\tau_n \cdots d\tau_2 d\tau_1$$

(Bew.: Übung)

Vereinbarung: $:A(t): = A(t)$, $:1: = 1$,

$$:A + B: = :A: + :B:$$

$$:\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau: = \int_{t_0}^t :A(\tau): d\tau \quad \text{etc.}$$

Def.: Unter dem zeitgeordneten Exponential

$:\exp(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau):$ für eine stetige Matrix-Familie versteht man die Dyson-Reihe

$$:\exp(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau): = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} : \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^n :$$

Folgerung: Das zeitgeordnete Produkt

$:\exp(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau):$ ist das FUSY für $\dot{x} = Ax$

mit Anfangsbed. bei t_0 . Es stimmt

mit der PB-Reihe überein, und bekommt so eine präzise Bedeutung.

Bem.: Formalismus ist in der Physik üblich, aber nützt wenig zur Berechnung - dafür ist die PB-Reihe besser geeignet.