Michael Baake
Neil Mañibo

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 10.04.2025

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 1

(1) Wir betrachten die rekursiv definierten Fibonacci-Zahlen:

$$f_0 = 0, f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \qquad (n \geqslant 1)$$

Zeigen Sie, dass $f_n \sim \alpha \cdot \tau^n$ gilt (für $n \to \infty$), und bestimmen Sie α. Dabei ist $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Hinweis: Hier ist es möglich, eine Formel für die f_n abzuleiten (entweder mit linearer Algebra oder mittels der erzeugenden Funktion $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n x^n$).

(3 Punkte)

(2) Untersuchen Sie die Binomialkoeffizient $\binom{n}{m}$ modulo 2 auf ihre Struktur. Wie kann man sie effektiv berechnen?

Hinweis: Pascal-Dreieck modulo 2 betrachten! Schreiben Sie ein kleines Programm z.B. für die ersten 512 Zeilen des Dreiecks.

(2 Punkte)

(3) Zeigen Sie, dass die Gauß-Kurve $y(x) = e^{-x^2}$, mit $x \in \mathbb{R}$, die eindeutige Lösung des folgenden AWPs ist,

$$y' = -2xy\ , \qquad y(0) = 1\,.$$

Setzen Sie die Picard-Iteration ein, um die Potenzreihe von e^{-x^2} herzuleiten.

(3 Punkte)

(4) Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

eine Lösung der Wellengleichung ist, also

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$

erfüllt, wobei $c > 0$ eine Konstante ist (z.B. die Schallgeschwindigkeit für akustische Wellen). Was bedeuten die Terme?

Zusatz: Gibt es weitere Lösungen? **(4 Punkte)**

Abgabe bis Donnerstag, 17.04.2025, 12 Uhr, beim Tutor .