Michael Baake
Neil Mañibo
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 17.04.2025

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 2

(5) Studieren Sie die numerische Lösung des AWP

$$\dot{x}(t) = x(t), \qquad x(0) = 1$$

im Intervall $[0, 1]$ mit dem Eulerverfahren mit 5, 10 und 20 Schritten. Machen Sie eine Zeichnung!

(3 Punkte)

(6) Lösen Sie die folgenden AWPs:

(a) $\dot{x}(t) = e^{t+x(t)+3}, \qquad x(0) = -3$

(b) $\dot{x}(t) = x(t) + 4t + 1, \qquad x(0) = -4$

Hinweis: Bei (a) ist auf den Definitionsbereich von $x(t)$ zu achten. Bei (b) macht man zunächst einen geeigneten Ansatz.

(4 Punkte)

(7) (Brouwer's Fixpunktsatz in einer Dimension)

Sei f eine stetige Abbildung von $I = [0, 1]$ in sich. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt (also dass ein $\xi \in I$ existiert mit $f(\xi) = \xi$).

Hinweis: Machen Sie sich zunächst eine Skizze, und überlegen Sie dann, welche Eigenschaft stetiger Funktionen hier benötigt wird.

(2 Punkte)

(8) Wir untersuchen die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$.

(a) Finden Sie zunächst eine Lösung im Bereich $x > 0$.

(b) Zeigen Sie: Ist $x(t)$ eine Lösung, dann auch $y(t) = -x(-t)$. Welche Lösungen im Bereich $x < 0$ ergeben sich?

(c) Setzen Sie aus obigen Teilen Lösungen zusammen, die für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert sind.

(d) Zeigen Sie, dass man auch Strecken mit $x = 0$ zwischen negative und positive Teile setzen kann und dabei für alle $t \in \mathbb{R}$ definierte Lösungen erhält. Prüfen Sie insbesondere nach, dass $x(t)$ auch an den „Nahtstellen“ differenzierbar ist und der Differentialgleichung genügt.

(e) Welche Lösungen hat das Anfangswertproblem $\dot{x} = \sqrt{|x|}, x(0) = 0$?

(5 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 24.04.2025, 12 Uhr, beim Tutor .