Michael Baake
Neil Mañibo

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 21.04.2025

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 3

(9) Die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \big(1 - x(t)\big)x(t)$$

heißt *logistische Gleichung*.

(a) Lösen Sie die logistische Gleichung. *Hinweis:* $\dfrac{1}{(1-x)x} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{x}$

(b) Zeichnen Sie einige Lösungskurven $x(t)$ im Quadranten $x, t \geqslant 0$.
Hinweis: Kurven im Bereich $0 < x < 1$ unterscheiden sich sehr von Kurven im Bereich $x > 1$.

(c) Die logistische Gleichung ist ein einfaches Modell für das Wachstum einer Population bei begrenztem Nahrungsvorrat. Interpretieren Sie die Lösungskurven entsprechend! (t = Zeit, x = Größe der Population)

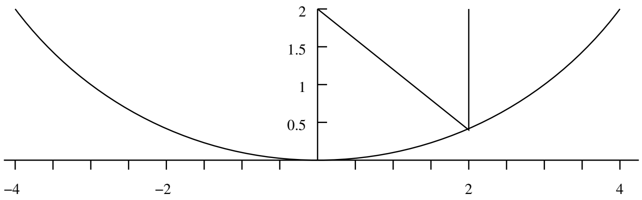
(4 Punkte)

(10) Im Punkt $(0, a)$ mit $a > 0$ des x, y-Koordinatensystems befinde sich eine punktförmige Lichtquelle. Wir wollen im Ursprung $(0, 0)$ einen gekrümmten Spiegel befestigen (modelliert durch eine Funktion $y(x)$), und zwar so, dass das von der Lichtquelle kommende und vom Spiegel reflektierte Licht paralell zur y-Achse nach oben abgestrahlt wird.

(a) Stellen Sie für $y(x)$ eine Differentialgleichung auf.

Hinweis: Es gilt: Einfallswinkel = Ausfallswinkel. Berechnen Sie für einen einfallenden Lichtstrahl seinen Schnittpunkt mit der y-Achse nach der Reflexion im Spiegel, und nutzen Sie die Bedingung, dass all diese Schnittpunkte $(0, a)$ sein müssen. Benutzen Sie zur Vereinfachung der auftretenden Winkelfunktion gegebenenfalls eine Formelsammlung.

(b) Zeigen Sie, dass der gesuchte Spiegel ein Parabolspiegel ist (d.h. die Funktion $y(x)$ ist eine Parabel).



(4 Punkte)

(11) (Fixpunktsatz für schwache Kontraktionen)

Sei $K \neq \varnothing$ eine kompakte Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes, und sei $f : K \to K$ eine schwache Kontraktion, also $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$ für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$, wobei $d(\cdot, \cdot)$ die Metrik bezeichne.

Zeigen Sie: Es gibt genau einen Fixpunkt von f in K, also genau ein $x^* \in K$ mit $f(x^*) = x^*$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $d\big(x, f(x)\big)$ auf K.

(3 Punkte)

(12) Sei $X = \{0, 1\}^n$ die Menge der binären Sequenzen der Länge n, wobei $n \in \mathbb{N}$. Für $x, y \in X$ ist die *Hamming*-Distanz definiert durch

$$d_H(x, y) := \operatorname{card}\big(\{1 \leqslant i \leqslant n \mid x_i \neq y_i\}\big) .$$

Zeigen Sie, dass (X, d_H) ein metrischer Raum ist. Ist er vollständig? Wie würden Sie eine Metrik auf $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ansetzen?

(3 Punkte)

Abgabe bis **Freitag, 02.05.2025, 12 Uhr**, beim Tutor.