

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 4

(13) Wir betrachten noch einmal das AWP

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$$

- (a) Berechnen Sie die Lösung mittels Potenzreihenansatz bis zur 10. Ordnung einschließlich.
- (b) Führen Sie den Beweis aus, dass die Potenzreihe höchstens den Konvergenzradius 1 besitzt.
- (c) Leiten Sie eine nicht-triviale Abschätzung für den Konvergenzradius nach unten her.

(3 Punkte)

(14) Wir analysieren das AWP

$$\dot{x} = t + x, \quad x(0) = 1.$$

- (a) Lösen Sie das AWP mit der Lösungsmethode für inhomogene lineare Differentialgleichungen.
- (b) Wandeln Sie das AWP in die zugehörige Volterra-Integralgleichung um und berechnen Sie die ersten 3 Picard-Iterationen.
Wie könnte man dies fortführen, um die Lösung aus (a) zu bekommen?

(4 Punkte)

(15) Die DGL $\dot{x} + g(t)x + h(t)x^n = 0$ mit $2 \leq n \in \mathbb{N}$ heißt Bernoulli-Differentialgleichung.

(a) Zeigen Sie:

Mit dem Ansatz $z = x^{1-n}$ erhält man daraus die lineare DGL

$$\dot{z} + (1-n)g(t)z + (1-n)h(t) = 0.$$

(b) Lösen Sie das AWP

$$\dot{x} + \frac{1}{t}x = tx^2, \quad x(1) = -\frac{1}{2}.$$

(3 Punkte)

(16) Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

(a) $(x^3 + (1 + xy)e^{xy})y' + (y^2e^{xy} + 3x^2y) = 0$

(b) $2xy' + y = 0$

Hinweis: Für (b) gibt es zwei Lösungswege – nutzen Sie beide und vergleichen Sie dann!

(4 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 08.05.2025, 12 Uhr, beim Tutor.